现代应用数学丛书

经济理论中的数学方法

〔日〕安井琢磨　二階堂 副包　著



上海科学技术出版社

现代应用数学丛书

經济理論中的数学方法

——平衡解存在問題——

〔日〕安井琢磨、二階堂副包 著

談祥柏 譯

刘源張 校

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的現代应用数学丛书之一的中譯本。以凸集理論为中心，討論了經济理論中較新的数学方法，集合論方法的性质与特征，并且介紹了若干应用这种方法所取得的成果。全书分經济学中基础概念的数学表現及 Walras 式平衡模型与不动点定理两章。可供大专院校有关专业师生以及計划、經济理論有关研究工作者參考。

現代应用数学丛书

經济理論中的数学方法

——平衡解存在問題——

原书名　経済理論における数学的方法
——均衡解の存在問題——

原著者　〔日〕安井琢磨　二階堂副包

原出版者　岩波书店　1958

譯者　談祥柏

校者　刘源張

*

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
上海市书刊出版业营业許可証出093号

新华书店上海发行所发行　各地新华书店經售

商务印书館上海厂印刷

*

开本850×1168 1/32　印張2 16/32　字数57,000
1963年5月第1版　1963年5月第1次印刷
印数1—4,600

統一书号：13119・346
定　价：（十四）0.46元

出版説明

这一套书是根据日本岩波书店出版的"现代应用数学讲座"翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其內容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价値。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理，为了尽可能地减少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书內容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注释和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

現代应用数学丛书

书名	原作者	譯者
代数学*	弥永昌吉等	熊全淹
几何学*	矢野健太郎	孙澤瀛
复变函数·	功力金二郎	刘书琴
集合·拓扑·测度*	河田敬义	賴英华
泛函分析*	吉田耕作	程其襄
广义函数*	岩村联	楊永芳
常微分方程*	福原满洲雄	張庆芳
偏微分方程*	南云道夫	錢端壯
特殊函数*	小谷正雄等	錢端壯
差分方程*	福田武雄	穆鸿基
富里哀变换与拉普拉斯变换*	河田龙夫	錢端壯
变分法及其应用*	加藤敏夫	周怀生
李群論*	岩堀长庆	孙澤瀛
随机过程*	伊藤清	刘璋温
回轉群与对称群的应用*	山内恭彦等	張质賢
結晶統計与代数*	伏見康治	孙澤瀛
偏微分方程的应用	犬井鉄郎等	楊永芳
微分方程的近似解法	加藤敏夫等	王占瀛
数值計算法*	森口繁一等	閻昌龄
量子力学中的数学方法*	朝永振一郎	周民强
工程力学系統*	近藤一夫等	刘亦珩
非綫性振动論*	古屋茂	吕紹明
力学系与映射理論*	岩田义一	孙澤瀛
平面彈性論*	森口繁一	刘亦珩
有限变位彈性論与变形几何学*	山本善之 近藤一夫	刘亦珩
塑性論·	鷲津久一郎	刘亦珩
粘性流体理論*	谷一郎	刘亦珩
可压縮流体理論*	河村龙馬	刘亦珩
网絡理論·	喜安善市等	陆志刚
自动控制理論*	喜安善市等	穆立林
网絡拓扑学·	近藤一夫	張設
信息論*	喜安善市等	李文濤
推断統計过程論	北川敏男	刘璋温
統計分析*	森口繁一	刘璋温
試驗設計法*	増山元三郎	刘璋温
群体遺傳学的数学理論*	木村資生	刘祖洞
博奕論·	宮澤光一	張毓椿
綫性規划*	森口繁一等	刘源張
經济理論中的数学方法·	安井琢磨等	談祥柏
随机过程的应用*	河田龙夫	刘璋温
計算技术	高桥秀俊	姚晋
穿孔卡計算机	森口繁一	刘源張

注：有*者已經出版，有·者即將出版。

譯者序

本书叙述的主要內容是平衡解存在定理。如所周知，所謂一般均衡理論是以 Walras(法国)，Pareto(意大利)为代表的洛桑学派所創始的。本书的理論是古典一般均衡理論的继續发展，作者运用了集合論的方法，利用欧氏空間綫性代数与初等拓扑学作为工具，对一些經济理論問題作了定量的探討，并給出了平衡解存在定理的証明。

作者二階堂是日本有名的經济計量学家，在这方面有許多研究工作。本书第 1 章叙述了如何用凸集的基本性质来解释生产、消費等經济現象，以作为后面的准备。第 2 章談到了不动点定理，并証明了平衡解的存在(单純交換模型与 Arrow-Debreu 模型)。

对于通曉計量經济学的讀者来說，閱讀本书需要具备一些集合論与拓扑学的知識，这方面的入門书不少，对那些打算在較短时間內掌握这些基础知識的讀者来說，可以先看本丛书中的《集合·拓扑·測度》(河田敬义著，賴英华譯)一书。

本书內容是以資本主义經济为背景，所以本书所述某些“法则”和提法，如“完全竞爭”，“利潤最大原则”，“边际效用”，“收获率不变法则”，“收获率非递增法则”等，对我国社会主义經济并不适用。此外，本书中某些名詞，如“財貨”，也与我国經济文献中的“財貨”含义不同。尽管如此，这本书对于我們了解现代經济計量学的某些理論和学說，探討集合論方法和其他高深数学在經济学中应用的可能性，以及如何构造經济数学模型等，仍有一定参考价值。翻譯本书的目的也在于此。

譯稿承中国科学院数学研究所刘源張先生审閱，提出了許多宝貴意見，在此表示感謝。限于譯者的水平，因此疏漏錯誤之处，在所不免，切望讀者加以指正。

談祥柏 1962 年 6月 於上海

序

自从 A. A. Cournot 开始，在經济理論中有系統地引进了数学方法，特别是从 L. Walras, V. Pareto 形成了一般平衡理論以来，数学作为經济理論的不可缺少的工具，其重要性已越发增加了。大致說，直到本世紀三十年代的末期为止，在經济学上所用到的数学，是以微积分学为主，此外，包含微分方程、差分方程、古典代数等部分。由于这样一些数学方法的引用，使經济理論取得了很大进步，不容否认，显著地提高了精确性，然而，微积分学的机械运用，对于闡明經济現象是不是一种很合适的方法，这一点尙成疑問。由于这种方法，在遇到經济現象的数学的定式化时，不仅需要作出不必要的强假定，而且又多方回避了构成理論基础的中心命題的証明。对于这一点的重新考慮，以 1944 年 von Neumann 与 Morgenstern 的“博奕論与經济行为”一书的出現为轉折而頓然加深。在这以后不久，对在三十年代中叶就已写出但一直被忽略的 A. Wald 与 J. von Neumann 的經济学論文的首創性意义，重新引起了注意。从这样的情况出发，形成了使用更为适合于經济現象的数学，并且充分发揮了数学所具有的論証能力与分析能力的新的研究方向。其研究成果，一方面成为利用产业关联理論与綫性規划所作的經济分析，另一方面重新构成了古典的平衡理論，而在这个平衡理論的基础上，正在出现向新的領域前进的趋势。本书将討論这个經济理論的新动向中所見到的数学方法。在內容方面，本书的目的，是闡述上面两种成果中属于后面那一部分的一些成就。至于前者，特别是綫性規划，以及与之有密切关系的博奕論，已經在本丛书的其他书里談到了。此外，在历来經济理論上所利用的古

典的数学，由于叙述它們的书籍已很多，所以凡是涉及到它們时，本书只好割爱了。

本书所讲到的方法，就是一部分經济学者所說的集合論的方法。这是对于引用 Euclid 空間中的綫性代数与初等拓扑学的一种倾向的一般性称呼。目前的发展状況是：成为其中心內容的是有关凸集的一些定理，因而，本书一方面也是凸集理論。

第 1 章解釋了凸集的基本性质，并考察了怎样将生产、消費等經济現象用凸集概念来表示。这是为后面的本論部分做好数学与經济学的准备。但是，对有广泛应用(特别是用来証明博奕論中的鞍点定理以后)的分离定理的解釋，这里只好割爱了。这是因为篇幅的限制，本书叙述的內容只能以一个課題——即平衡解存在問題——作为中心而予以統一起來的緣故。事实上，在目前情况下，有鉴于闡明这个問題，要涉及較之分离定理更深一层地触及凸集性质的定理(即不动点定理)，这也許是不得不采取的措施。

第 2 章叙述了关于平衡解存在定理的最近研究成果，这是从 Walras 以来一般平衡理論中沒有解决的基本問題之一。Wald 排除了那种方程数与未知数个数相一致的朴素方法，第一次严格証明了平衡理論中特别情形(即 Cassel 方程)的解的存在性。这个問題，最近由于 K. J. Arrow 和 G. Debreu, D. Gale, L. McKenzie, 与二階堂等人的工作而取得了很大的进展。这里，重要点是，在經济学上所得的循环(后文要說到的 Walras 法则)，就是数学上的不动点定理。在遇到 Arrow–Debreu 模型的說明时，避开了不必要地以一般定理为依据的办法，問題的解决在必要与可能范圍內尽可能采用簡明易懂的办法来闡述。

本书原計划由古谷弘教授撰写，由于教授突然亡故，仓卒間才由笔者二人担任这一任务，并商定由二階堂执笔，由安井作一些整理加工。

目　录

第1章　經济学中基础概念的数学表現

經济学上的財貨空間(或商品空間),无非就是把 Euclid 空間給与适当的經济学的解釋。成为生产、消費等經济活动对象的財貨,除了谷物、煤炭、化学纤維等物理的財貨之外,还包含各种劳动(例如熟练劳动与不熟练劳动)与各种服务(例如输送等服务)。根据問題的性质与研究的角度,把它們分成 n 类,并用号碼区别,例如可分別記为第一种財貨,第二种財貨,……,以及一般地,第 j 种財貨等等。如果由各該相应的度量单位所决定的各种財貨的量值用实数来表示,即如果第 j 种財貨的量値为 x_j,則財貨的組合 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 就可以看作是 n 維 Euclid 空間 R^n 的一个点。此时,除去例外的一些情况,在經济学上的財貨的量值作为連續量来处理,就可以应用 Euclid 空間的綫性代数、点集論等方面的許多研究成果。

在研究数理經济学的学者中間,虽然微积分,最近还有綫性代数等方面的知識已相当普及,但是,点集論,特别是有关 Euclid 空間拓扑学的知識,很明显是貧乏的。这本书假定讀者已經有了拓扑学的极初步的修养。由于篇幅的限制,要把本书的叙述做到完整独立,遺憾得很,是做不到的。幸而,在本丛书中,河田教授著的《集合·拓扑·測度》一书中已将有关的知識闡述了,此外,这方面較好的入門书籍也不少,讀者可以用各自适当的方法学习和掌握这方面的最低限度的知識。这里所謂拓扑学的修养,也不过是指关于一些最基本的、常識性的东西,例如收斂、邻域、閉包、閉集、开集、內点、境界点、外点、連通、同胚、緊性等等。这些在一般微积分学开头的地方就有出現,对于学习近代数学以及有志于研究其应用的人,不論其专攻領域如何,都是必需的常識,这一点,必需予以强調。

§1 凸　集

以 Euclid 空間 R^n 中两个点 x, y **为端点的綫段**,是由

$$\alpha x+\beta y;\quad \alpha,\ \beta\geqq 0,\quad \alpha+\beta=1 \tag{1.1}$$

表示的点的集合。这集合用記号$[x, y]$表示。必要时，还使用記号(x, y)，$[x, y)$，$(x, y]$等等。它們分別表示着下列集合：

$$(x, y)=\{\alpha x+\beta y \mid \alpha>0,\ \beta>0,\ \alpha+\beta=1\},$$
$$[x, y)=\{\alpha x+\beta y \mid \alpha>0,\ \beta\geqq 0,\ \alpha+\beta=1\},$$
$$(x, y]=\{\alpha x+\beta y \mid \alpha\geqq 0,\ \beta>0,\ \alpha+\beta=1\}.$$

綫段$[x, y]$的各个点，叫做x与y的**凸組合**。

"如果R^n的子集X包含两个点x, y，則X必同时包含綫段$[x, y]$"，滿足这样的性质时，X叫做**凸集**。上述凸集定义中："如果包含两个点$x, y\cdots$"等一段并沒有說X一定不是空集，空集亦是凸集的一种。然而，今后遇到其意义很明显，不会引起混淆的时候，諸如"非空集的凸集"等冗长的叙述，当极力避免。除去空集以外，还有R^n全体、超平面、直綫等的部分綫性空間、一个点、球的內部等等，总之，凸集的例子非常之多。

例1 正象限 在R^n的点$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$中，所有的坐标分量都是非負时，則一切这样点的集合称为R^n的**正象限**，用R^n_+表示，即

$$R^n_+=\{x \mid x_j\geqq 0 \quad (j=1, 2, \cdots, n)\}. \tag{1.2}$$

当$n=2$时，如图1.1所示，R^2_+相当于第一象限。由上可見，R^n_+是凸集。

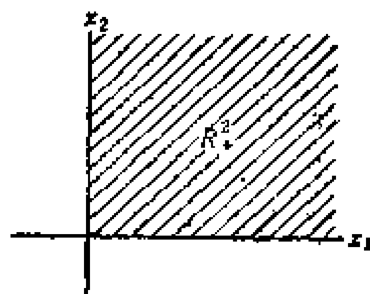


图 1.1

例2 一次不等式的解集合 在R^n中給定有限个或无限个一次函数

$$f_\lambda(x)=\sum_{j=1}^{n} a_{\lambda j}x_j+b_\lambda \quad (\lambda\in\Lambda),$$

不等式組$f_\lambda(x)\geqq 0$的解集合，即

$$X=\{x \mid f_\lambda(x)\geqq 0,\ \lambda\in\Lambda\} \tag{1.3}$$

是一个凸集。这里，Λ是下标的集合。如果把全部不等号"≧"或其中的若干个用严格不等号">"或用等号代替，或改变不等号的方向，亦得到同样的結果。

証明 如果$x, y\in X$，則

$$f_\lambda(x)=\sum_{j=1}^{n}a_{\lambda j}x_j+b_\lambda\geqq 0,$$

$$f_\lambda(y)=\sum_{j=1}^{n}a_{\lambda j}y_j+b_\lambda\geqq 0\quad(\lambda\in\Lambda).$$

故对于 $\alpha,\ \beta\geqq 0,\ \alpha+\beta=1$，有

$$\begin{aligned}f_\lambda(\alpha x+\beta y)&=\sum_{j=1}^{n}a_{\lambda j}(\alpha x_j+\beta y_j)+b_\lambda\\&=\alpha\left(\sum_{j=1}^{n}a_{\lambda j}x_j+b_\lambda\right)+\beta\left(\sum_{j=1}^{n}a_{\lambda j}y_j+b_\lambda\right)\\&=\alpha f_\lambda(x)+\beta f_\lambda(y)\geqq 0\quad(\lambda\in\Lambda).\end{aligned}$$

因此

$$\alpha x+\beta y\in X.$$

其余情况亦可同样地証明。

在例 2 中，若下标的集合 Λ 只含有一个元素，则 X 称为半空間(說得更完整些，是半閉空間)。由解析几何可知，对于一个一次函数

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}a_jx_j+b,$$

$L=\{x|f(x)=0\}$ 表示超平面，这个超平面把 R^n 分成两部分，即所謂正領域 $\{x|f(x)>0\}$ 与負領域 $\{x|f(x)<0\}$. 这些領域各与超平面 L 的和集是半空間

$$X_+=\{x|f(x)\geqq 0\}\ 与\ X_-=\{x|f(x)\leqq 0\}.$$

这样情况下，系数 a_j 中一定要有非 0 的数，这一点显然是要作为前提的。

此外，对 $\Lambda=\{1,\ 2,\cdots,\ n\}$，如果 $a_{\lambda j}=\delta_{\lambda j}$ (Kronecker 的 δ) ❶，$b_\lambda=0$，则 X 就是例 1 的正象限。Λ 作为无限集的例子，如果設

$$f_\lambda(x)=-x_1\cos\lambda-x_2\sin\lambda+1\quad(0\leqq\lambda<2\pi),$$

则 X 就是 R^2 中以原点为中心，半徑为 1 的圓。

对应于在例 2 中規定 X 的各个一次函数 f_λ 的集合，则可得

$$X_\lambda=\{x|f_\lambda(x)\geqq 0\}.$$

如果 $a_{\lambda j}$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 中有非 0 的数，这些集合是半空間，如果 $a_{\lambda j}=0$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，则有二种情况：当 $b_\lambda\geqq 0$ 时是 R^n 全体；当 $b_\lambda<0$ 时则成为空集。总之，不管怎样，由于 $X=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$，所以 X 是有限个或无限个半空間的公共部分。

---

❶ $\delta_{\lambda j}=\begin{cases}0\ (\lambda\neq j),\\1\ (\lambda=j).\end{cases}$

許多点的凸組合　对 R^n 的 s 个点 $x^1, x^2, \cdots, x^s$ 加数分别是 $\alpha_i \geqq 0$，且 $\sum_{i=1}^{s} \alpha_i = 1$ 所作的一次組合 $\sum_{i=1}^{s} \alpha_i x^i$ 叫做这些点的凸組合。如果 X 为凸集，$x^i \in X (i=1, 2, \cdots, s)$，$\alpha_i \geqq 0$，$\sum_{i=1}^{s} \alpha_i = 1$，則 X 含有这些点的凸組合。

証明　当 $s=2$ 时，由 X 是凸集的定义，本定理的結論显然是正确的。假定 $s=m$ 时，結論亦是正确的。如果有一个 α_i 是 0，那末 $m+1$ 个点 $x^1, x^2, \cdots, x^{m+1}$ 的凸組合可以看作是 m 个点的凸組合，于是由归納法的假設可知 X 是包含凸組合的。以下設 $\alpha_i > 0$ $(i=1, 2, \cdots, m+1)$，則有

$$\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i x^i = \alpha_1 x^1 + (1-\alpha_1) \sum_{i=2}^{m+1} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_1} x^i. \tag{1.4}$$

上式可以看作是 X 的两个点 x^1，$\sum_{i=2}^{m+1} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_1} x^i$ 的凸組合，所以 (1.4) 含于 X 中。这是由于 x^1 按照原来的假設，而 $\sum_{i=2}^{m+1} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_1} x^i$ 由归納法的假設都分别含于 X 中，故知定理为眞。

§2　凸集与集的运算

(i)　**几个凸集的公共部分**　給定有限个或无限个凸集 X_λ $(\lambda \in \Lambda)$，則它們的公共部分 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ 也是凸集。

証明　如果 $x, y \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$，則 $x, y \in X_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$。故

$$[x, y] \subset X_\lambda \quad (\lambda \in \Lambda),$$

所以

$$[x, y] \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda.$$

(ii)　**凸集的直积**　給定 X_λ 作为 n_λ 維財貨空間 R^{n_λ} 的凸集 $(\lambda = 1, 2, \cdots, s)$，則直积 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_s$ 是直积 $R^{n_1} \times R^{n_2} \times \cdots \times R^{n_s}$ $\left(或者亦可記为 R^n,\ n = \sum_{\lambda=1}^{s} n_\lambda\right)$ 的子集，它也是一个凸集。

証明 把 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_s$ 中的两个点用

$$x = [x^1, x^2, \cdots, x^s], \quad y = [y^1, y^2, \cdots, y^s]$$

来表示，如果 $x^\lambda, y^\lambda \in X_\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \cdots, s)$，那末对于 $\alpha, \beta \geqq 0$，$\alpha + \beta = 1$，有

$$\alpha x + \beta y = [\alpha x^1 + \beta y^1, \alpha x^2 + \beta y^2, \cdots, \alpha x^s + \beta y^s].$$

这里，由于各个 X_λ 是凸的，故

$$\alpha x^\lambda + \beta y^\lambda \in X_\lambda.$$

于是由直积的定义推得

$$\alpha x + \beta y \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_s.$$

(iii) **凸集在仿射映象下的象** 所謂仿射映象 $f: R^n \to R^m$，卽是对于使得 $\alpha + \beta = 1$ 的 α, β 值，能使

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

成立的映象。在这里，关于 α, β 的正負不受限制。如所周知，仿射映象是綫性映象与平行移动相結合的一种映象。如果 X 是 R^n 的凸集，則其象 $f(X)$ 也是凸集。

証明 如果 $f(X) \ni f(x), f(y)$，則对 $\alpha, \beta \geqq 0$，$\alpha + \beta = 1$ 有

$$\alpha f(x) + \beta f(y) = f(\alpha x + \beta y),$$

并且 $\alpha x + \beta y \in X$。故而

$$\alpha f(x) + \beta f(y) \in f(X).$$

应用例 1 凸集与純数的乘积 若集合 $X \subset R^n$，則当 α 为实数时，集合 $\alpha X = \{\alpha x \mid x \in X\}$ 称为 X 的 α 倍。如果 X 是凸集，那末 αX 也是凸集。

証明 由于映象 $f(x) = \alpha x$: $R^n \to R^n$ 是仿射映象，并且 $\alpha X = f(X)$，故可視为上述第(iii)种情形的特例。

应用例 2 几个凸集的矢量和 对于集合 $X_\lambda \subset R^n$ $(\lambda = 1, 2, \cdots, s)$，把集合 $\left\{\sum_{\lambda=1}^{s} x^\lambda \mid x^\lambda \in X_\lambda\right\}$ 用 $\sum_{\lambda=1}^{s} X_\lambda$ 来表示，或者把它記为

$X_1+X_2+\cdots+X_s$❶，称为这些集合的矢量和。如果各个 X_λ 是凸集，则其矢量和亦是凸集。

証明　映象

$$f(x^1, x^2, \cdots, x^s)=\sum_{\lambda=1}^{s} x^\lambda: R^n\times R^n\times\cdots\times R^n\to R^n$$

是仿射映象，且

$$\sum_{\lambda=1}^{s} X_\lambda=f(X_1\times X_2\times\cdots\times X_s).$$

故根据(ii)，$X_1\times X_2\times\cdots\times X_s$ 是凸集，又根据(iii)可知，它的仿射映照下的象亦是凸集。

由上面两个例子可見，当 X 与 Y 是凸集时，其矢量差 $X-Y$ 也是凸集。

§3　生产活动与凸集

在国民經济再生产的各个环节中，生产、消費等經济活动，有着很复杂的相互影响关系。在这样的相互关系中，我們把具有經济学意义的、行施决策的行动单位叫做經济主体，例如国际貿易論中的国家，作为国民經济构成单位的企业，家庭經济，以及在計划經济理論中的計划行政部門等等，都是經济主体的例子。

所謂生产，就是結合一些生产要素(如劳动力、原料等等)把它們变换成产品。如果形式地加以規定，则在 n 种財貨里，有些是作为投入物，有些是作为产品。同一种类的財貨，有可能既是投入物又是产品，并且所有的財貨都是純数，即是說，产品与投入物的差额可用 y_j $(j=1, 2, \cdots, n)$来表示。如果 $y_j>0$，则理解为把第 j 种財貨看作产品，如果 $y_j<0$，则理解为将 $-y_j$ 个单位作为投入物。这样一来，就可把**生产活动**(或者更簡短一些，把它叫做活动 process, activity)作为投入物与产品之間的技术变换来处理，于是就

---

❶ 注意不要把矢量和 $X_1+X_2+\cdots+X_s$ 与和集 $X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_s$ 相混淆。

可由財貨空間中的点 $y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 来表示。再进一步，我們将某个經济主体的所有那些在技术上可能的活动 y 的集合用 Y 来表示。这里所謂"技术上可能"的意思是指：只要所需要的投入物能够保証供应❶，則 Y 内的 y 是可能实现的(feasible)。对于活动 $\alpha y\ (\alpha\geqq 0)$，$y\in Y$，如果 $\alpha=0$，則是投入物与产品同时为0，也就是說，它对应着經济上的无活动状态。当 $\alpha>0$ 时，則表示着以活动 y 的投入物与产品的 α 倍作为其投入物与产品的活动，亦卽对应着以 y 的 α 倍規模来运轉的活动。α 称为**活动水平** (activity level)❷。因而，可以看作 $\alpha y\in Y$。此外，当 $y^1, y^2\in Y$ 成立时，由于 y^1+y^2 的投入物与产品分别是 y^1, y^2 的投入物与产品之和，故它对应于两种活动的并行的运轉。由于这在技术上也是可能的，所以 $y^1+y^2\in Y$ 可以成立。

在上述經济学的解釋之下，Y 的这种性质："如果 $y, y^1, y^2 \in Y$，若 $\alpha\geqq 0$，則 $\alpha y, y^1+y^2\in Y$"，相当于数学上**凸錐**的定义。容易看到，凸錐是一个凸集。

技术矩陣 給定有限个活动 $a^1, a^2, \cdots, a^m\in R^n$，我們来考虑两种情况：第一种是把这些活动并行地运轉的活动，第二种是以种种不同的活动水平进行着的活动。显然，这两者結合起来时，就能产生无数的活动。此等活动集合就成为上面所說的 Y 的一个实例，卽

$$Y=\left\{\sum_{i=1}^{m} x_i a^i \,\middle|\, x_i\geqq 0 \quad (i=1, 2, \cdots, m)\right\}. \tag{3.1}$$

現在作一个以 a^i 为第 i 行的矩陣

$$A=\begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^m \end{bmatrix}.$$

---

❶ 一般說来，由于 y 是表示現有投入物与現有产品之間的技术变换关系，因而是在投入物与該項資本設备得到保証的前提之下来說的。

❷ 更詳細一些說，当 $z=\alpha y$ 时，我們把 α 叫做在把 y 作为单位活动时的活动水平。

又若 $x\in R_+^m$，则(3.1)就成为

$$Y=\{y|y=xA,\ x\in R_+^m\}. \tag{3.2}$$

A 叫做**技术矩陣**(technology matrix)，A 的元素称为**生产系数**，而 x 是**活动水平矢量**(activity level vector)。

关于生产活动集合的一些公設 在上面的解說中，活动的集合 Y 是一个凸錐，作为凸錐条件之一的："如果 $y\in Y$，则 $\alpha y\in Y$"，就是通常所称的"**收获率不变法則**"。但若按照 Arrow-Debreu 的看法，Y 不一定是凸錐，只当作为凸集，不过为此另外附加 Y 包含 0 的条件，则 $0\leqq\alpha\leqq1$，故对于 $y\in Y$，便有

$$\alpha y=\alpha y+(1-\alpha)0\in Y,$$

这就是**收获率非递增法則**。$n=2$ 时，如图 3.1 所示。設 $y=(y_1,y_2)$，$y_1<0$，$y_2>0$，则把第一种財貨 $-y_1$ 个单位投入后，第二种財貨 y_2 个单位就被生产出来。如果把通过 αy 且平行于 x_2 軸的直綫与 Y 的边界的交点取为 $z=(z_1,z_2)$，则有 $z_1=\alpha y_1$ 成立，并且一般地說，$\frac{z}{\alpha}\notin Y$。因而，在 Y 的活动中，只要 $\frac{z}{\alpha}$ 与第一种財貨的投入量相等，并且伴随着关于第二种財貨的生产量的最有利的 y，就使 $y_2<\frac{z_2}{\alpha}$ 成立。这时，就是**收获率递减法則**得以成立的情况。这个法則意味着：尽管将投入物增加到 $\frac{1}{\alpha}$ 倍，产品亦按相同比例来增高这一点在技术上不可能。Arrow-Debreu 为了顾及到經济現实，关于活动的集合 Y 必須有妥善的假定，他对于活动的集合，加上下列三个条件❶：

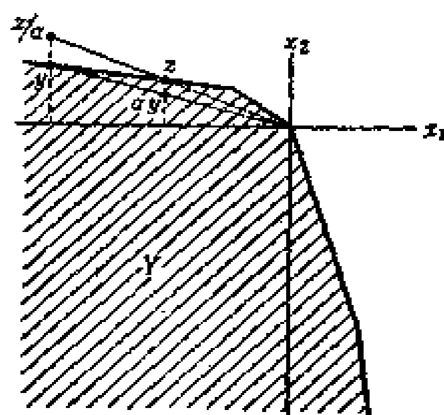


图 3.1

❶ 参阅本书参考文献 Arrow & Debreu [2]。

029-14C1

(1) Y 是包含 0 的凸的閉集。

(2) Y 与正象限 R_+^n 的公共部分只能是 0。

(3) Y 与 $-Y$ 的公共部分只能包含 0。

关于第一点，Y 是包含 0 的凸集，其意义已經讲过了。假如对于活动 y，只要不論怎样与 y 靠近的活动含于 Y 中时，y 也含于 Y 中，由于这在技术上是可能的，所以閉集的假定也是妥当的。

不消耗任何投入物，而有某种財貨的正値作为产品而产出的活动，是用 0 以外的正象限的点来表示的。实际上，这是一种方便的說法而已，也就是說，第(2)条否定了无中生有的可能性，亦即“世外桃源”是根本不存在的。因此，$y \in Y$ 时，假使具有正的分量的話，也就必須具有負的分量。

第(3)条的意思是，0 以外的活动是不可逆的。对于 $y \in Y$，$-y$ 是将 y 的投入物与产品互换的活动，因而可以叫做逆活动。如果 $y \in Y$，且 $y \neq 0$，那末 $-y \notin Y$，其意思是說逆活动这时不可能。例如，有某种基本生产要素(如劳动等)，不管它在哪一个 y 里作为投入物，第(3)条件总是成立的。图 3.1 的 Y，是能满足(1)(2)(3)三个条件的实例。

§4 凸集的拓扑性质

对于 Euclid 空間 R^n 的两个点 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$，定义**内积**为

$$xy = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j. \tag{4.1}$$

以内积为基础可定义点 x 的**模**

$$\|x\| = \sqrt{xx}. \tag{4.2}$$

进一步，利用模的定义可以定义两点 x, y 之間的**距离**

$$\rho(x, y) = \|x - y\|, \tag{4.3}$$

这样就引入了拓扑的概念。在本节中，将以凸集的簡单的拓扑性質为中心进行叙述。

1) **点 a 与集合 X 的距离**　点 a 与集合 X 的距离 $\rho(a, X)$ 由

$$\rho(a, X)=\inf_{x\in X}\rho(a, x)$$

給出，当 $\varepsilon>0$ 时，

$$U(X, \varepsilon)=\{x \mid \rho(x, X)<\varepsilon\}, \tag{4.4}$$

叫做 X 的 **ε 邻域**。当集合 X 只是一个点的时候，則 $U(a, \varepsilon)$ 就是以 a 为中心的 ε 球邻域，于是成为凸集(开集)。如果引用前面讲过的集合的矢量和概念，則因 $U(X, \varepsilon)$ 可以写成

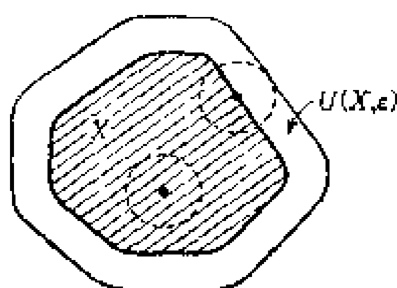


图　4.1

$$U(X, \varepsilon)=X+U(0, \varepsilon),$$

故若 X 为凸集，由 §2 的应用例 2 可知，$U(X, \varepsilon)$ 也是凸集。

2) 如果 X 是凸集，則 X 的**閉包** $\bar{X}$ 也是凸集。

証明　由于 $\bar{X}=\{x \mid \rho(x, X)=0\}$，故

$$\bar{X}=\bigcap_{\varepsilon>0}U(X, \varepsilon),$$

考虑到各个 $U(X, \varepsilon)$ 是凸集，故由 §2 的(i)可知 $\bar{X}$ 是凸集。

3) 若 a 是凸集 X 的内点，而 $b\in\bar{X}$，則綫段 $[a, b)$ 上的点都是 X 的内点。

証明　因为 a 是内点，故对适当的 $\varepsilon>0$，有

$$U(a, \varepsilon)\subset X.$$

由前述，$[a, b)$ 上的点可表示为下列的形状：

$$c_t=(1-t)a+tb \quad (0\leqq t<1).$$

現在，設 $x\in U(c_t, (1-t)\varepsilon)$，則

$$\|x-c_t\|<(1-t)\varepsilon.$$

又因 $b\in\bar{X}$，故有

$$t\|b-d\|<(1-t)\varepsilon-\|x-c_t\|$$

成立，所以与 b 充分接近的点 d 应当在 X 的内部。于是

$$\|x-(1-t)a-td\|\leqq\|x-(1-t)a-tb\|+t\|b-d\|<(1-t)\varepsilon,$$

两边用 $1-t$ 除并整理，因

$$\left\|\frac{1}{1-t}(x-td)-a\right\|<\varepsilon,$$

故

$$e=\frac{1}{1-t}(x-td)\in U(a,\ \varepsilon)\subset X.$$

于是

$$x=(1-t)e+td\in[e,\ d]\subset X.$$

故証明了

$$U(c_t,\ (1-t)\varepsilon)\subset X,$$

因而，c_t 是 X 的内点。上面証明的要点是，与 c_t 在綫段 $[a,\ b)$ 上接近 b 相对应，把球邻域的半徑縮小到 $(1-t)\varepsilon$ 这一件事。

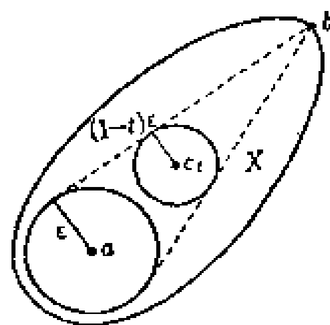


图 4.2

根据以上的証明，可以了解以下几个重要事实：

(i) 在以凸集 X 的内点 a 为端点的半直綫上，X 至多存在一个**境界点**。

証明 如果境界点有两个以上，設它們之中的两个是 $b,\ c$，则由 $b\in[a,\ c)$ 或 $c\in[a,\ b)$，根据 3)，$b,\ c$ 之中必有一个是内点。

(ii) 如果 X 是凸集，则 X 的内点的集合，即所謂**开核** X^0 也是凸集。

証明 設 $a,\ b\in X^0$，无需特别說明，由于 $b\in\bar{X}$，故有 $[a,\ b)\subset X^0$，因而結果 $[a,\ b]\subset X^0$ 成立。

(iii) X 是凸集，且如果 $X^0\neq\phi$，则 $\bar{X}=\bar{X^0}$.

証明 首先，由于 $X \supset X^0$，故立即就有 $\bar{X} \supset \bar{X}^0$. 反之，选擇一个內点 a，则因对于任意的 $b \in \bar{X}$，有 $[a, b) \subset X^0$ 成立。故在 X^0 中，存在着与 b 任意接近的点，因而可知 $b \in \bar{X}^0$.

(iv) X 是凸集，如果 $X^0 \neq \phi$，则 $(\bar{X})^0 = X^0$. 就是說，X 虽然附加上边界，但开核却不再扩大❶。

証明 由 $\bar{X} \supset X$ 可得 $(\bar{X})^0 \supset X^0$，故我們只要反过来証明 $(\bar{X})^0 \subset X^0$ 就行了。如果取任意的 $c \in (\bar{X})^0$，則对于充分小的 $\varepsilon > 0$，有 $U(c, \varepsilon) \subset \bar{X}$. 同时，根据性质(iii)，由于 $(\bar{X})^0 = (\bar{X}^0)^0 \subset \bar{X}^0$，故 $c \in \bar{X}^0$. 因而

$$U(c, \varepsilon) \cap X^0 \neq \phi.$$

現在把这二个集合的公共部分的点 a 取一个，則 $a = c + e$，$\|e\| < \varepsilon$，而 $a \in X^0$. 在这里，若注意到 $b = c - e \subset U(c, \varepsilon) \subset \bar{X}$ 适合 3) 的情况，則可得到

$$c = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \in [a, b) \subset X^0.$$

4) 如果 R^n 的凸集 X 有 $X^0 \neq \phi$ 的关系，且为有界閉集(即紧集)❷，則 X 叫做 n 維**凸体**。任意二个 n 維凸体 X，Y 是**同胚**的。就是說，存在着一个从 X 到 Y 上的一一且双方連續的映象。

証明 球邻域 $U(a, \varepsilon)$ 的閉包有

$$\overline{U(a, \varepsilon)} = \{x \mid \rho(x, a) \leq \varepsilon\}$$

成立，所以是一个 n 維凸体，它叫做**閉球邻域**，并記为 $\bar{U}(a, \varepsilon)$. 如果能証明 X 与 $\bar{U}(0, 1)$ 是同胚的，則以 $\bar{U}(0, 1)$ 作为媒介，X 与 Y 的同胚就立即可以明白了。現在，选取 X 的一个內点，把此点选作坐标原点。以原点为端点的半直綫 l 上必然存在着 X 的境界点。这是因为 l 是閉集，由于 X 是有界閉集，故 $l \cap X$ 也是有界

❶ 在 $X^0 = \phi$ 的情况，(iv)亦是成立的。参看 §6.

❷ 可参看入江[23]第 101 頁定理 16，河田[22]第 36 頁的 14.10.（即本丛书賴英华譯《集合·拓扑·測度》第 41 頁的定理。——譯者注）

闭集，从而在这集合上連續函数 $h(x)=\|x\|$ 达到其最大值❶，最大点是境界点的緣故。根据前面所讲的(i)，在 l 上除此以外是沒有境界点了。現在把 X 的全部境界点的集合記为 X^r，根据以上討論，有 $X^r\neq\phi$，$X^r\not\ni 0$，所以 $g(x)=x/\|x\|$ 是从 X^r 到 $\bar{U}(0,1)$ 的境界，即到向球面

$$C(0,1)=\{y\mid\rho(0,y)=1\}$$

的連續映象。对于 $C(0,1)$ 上任意点 y，以 0 为端点并通过 y 的半直綫 l 上至多存在着一个 X^r 的点 x，并且 $g(x)=y$ 成立。同时由于 l 上以外显然沒有 y 的原象，所以这个 g 是从 X^r 到 $C(0,1)$ 上的一一且連續的映象。X^r 显然是有界的，并且由于是 $X^r=\bar{X}\cap\bar{X^c}$ 的閉集，因而由于紧性，g 实际上是拓扑映象❷。于是可以得到从 $C(0,1)$ 到 X^r 上的拓扑映象 $g^{-1}(y)$（g 的逆映象）。在这里，从 $\bar{U}(0,1)$ 到 X 上的映象 f 应滿足

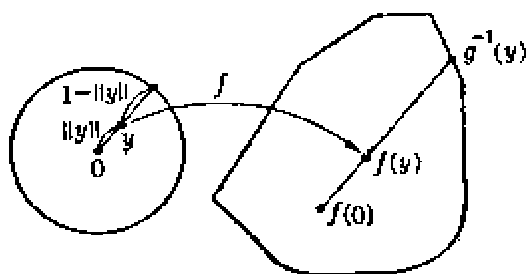


图 4.3

$$\begin{cases}f(0)=0,\\ f(y)=\|y\|g^{-1}(y/\|y\|)\quad(y\neq0).\end{cases}\tag{4.5}$$

故它是一一且連續的映象。再由 $\bar{U}(0,1)$ 的紧性可知 f 是拓扑映象。在作出映象(4.5)时，如果在 $\bar{U}(0,1)$ 上 $y\neq0$，由于 y 恒滿足 $0<\|y\|\leq1$，故要注意 $f(y)$ 成为原点与 $g^{-1}(y/\|y\|)$ 的凸結合，这个凸結合的系数是 $1-\|y\|$，$\|y\|$。

§5 凸　包

任意地选取 R^n 的集合 $X\neq\phi$ 中有限个点而作成的一切凸結

❶ 参看入江[23]第 96 頁定理 10，高木[24]第 31 頁定理 13。

❷ 参看河田[22]第 31 頁定理 12.7（中譯本，第 36 頁定理 12.7.——譯者注），入江[23]第 101 頁定理 15。

合的集合，称为 X 的**凸包**，記为 $C(X)$。

$$C(X)=\left\{\sum_{i=1}^{s}\alpha_i x^i \mid x^i\in X,\ \alpha_i\geqq 0,\ \sum_{i=1}^{s}\alpha_i=1\right\}. \qquad (5.1)$$

对于 $C(X)$，显然(5.1)成立，这里 x^i 的个数、选出方法、系数 α_i 的取法等等是完全任意的。很明显，$C(X)\supset X$，实际上，$C(X)$ 是包含 X 的最小的凸集。

对于 $\lambda,\ \mu\geqq 0,\ \lambda+\mu=1$，有

$$\lambda\sum_{i=1}^{s}\alpha_i x^i+\mu\sum_{j=1}^{t}\beta_j y^j=\sum_{i=1}^{s}\lambda\alpha_i x^i+\sum_{j=1}^{t}\mu\beta_j y^j.$$

$\lambda\alpha_i,\ \mu\beta_j\geqq 0$，并且，这些系数的总和等于1，所以 $C(X)$ 的任意二个点的凸結合是属于 $C(X)$ 的。所以，$C(X)$ 本身确实是凸集。此外，由于包含 X 的任意凸集必須包含 X 中点的凸結合，所以必須包含 $C(X)$ 的全部点。由以上所述，可知 $C(X)$ 是包含 X 的最小的凸集。

正一次組合与凸組合 在上述(5.1)中，同时选擇 x^i 的个数实际上至多只有 $n+1$ 个。为了闡明这个事实，就非負一次組合以及正一次組合証明类似的結果，再通过与凸組合的关系，推导出所需要的結果。

設 $x^i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$ 的一次組合为

$$\sum_{i=1}^{s}\alpha_i x^i, \qquad (5.2)$$

当系数 α_i 是非負数时，称为非負一次組合；当所有的系数都为正数时，叫做正一次組合。当 x 是有限个点 $x^i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$ 的非負一次組合(5.2)时，由于系数 $\alpha_i\geqq 0$ 不一定是唯一确定的，所以尽可能选擇 α_i 为各种各样数值，以使得具有正系数的 x^i 的个数为最小。此时，正系数的最小个数至多是 n，就是說，它与 R^n 的維数相等。

証明 設在(5.2)中，系数 α_i 选取了种种数值，此时，設

$$x=\sum_{i=1}^{t}\beta_i x^i \quad (t\leqq s) \tag{5.3}$$

已由具有最小个数的正系数来表示了。适当地改編号碼 i 之后，不妨假定开始的 t 个是正系数。此时，設 $t>n$，則由于 t 个点 x^i 是綫性相关的，所以要滿足下列系数不全为零的綫性关系：

$$\sum_{i=1}^{t}\gamma_i x^i=0. \tag{5.4}$$

按照假定，在(5.4)的非0系数里有正数，如令

$$\min_{\gamma_i>0}\beta_i/\gamma_i=\theta,$$

則 θ 是大于0的，将(5.4)乘 θ，并从(5.3)里减去，則得到

$$x=\sum_{i=1}^{t}(\beta_i-\theta\gamma_i)x^i. \tag{5.5}$$

(5.5)中由 θ 的定义

$$\beta_i-\theta\gamma_i\geqq 0 \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ t)$$

可知，至少有一个是0. 所以，x 是最多 $(t-1)$ 个 x^i 的非負一次組合。如再适当地选擇系数，可由最多 $(t-1)$ 个 x^i 的正系数的一次組合来表現。于是产生了矛盾。

作为关系到正一次組合的这个定理的应用，首先可用来导出关于凸包的定理。对于 R^n 的点，在其第 $n+1$ 个分量上附加1，这样得到 R^{n+1} 的点 $\bar{x}=(x,1)$. 只要 R^{n+1} 中的 $\bar{x}$ 是 $\bar{x}^i(i=1,2,\cdots,s)$ 的非負一次組合，那末 R^n 中的 x 就成为 x^i 的凸組合了。两者是具有同样内容的。在 R^{n+1} 上，$\bar{x}$ 用 $\bar{x}^i$ 的非負一次組合来表示时，正系数的最小个数至多是 $n+1$. 这就証明了我們想要推出的定理。

§6 单 純 形

若 X 是由 $(n+1)$ 个点 $x^i\in R^n(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ 所形成，且 $\bar{x}^i=(x^i,1)$ 在 R^{n+1} 上是綫性无关的，則 $C(X)$ 称为由**頂点** $x^0,x^1,\cdots,$

x^n 所張成的 n 維**单純形**。为行文方便起見，記为 $\overline{x^0x^1\cdots x^n}$。

例如，一个点 x^0；以两个点 x^0，x^1 为端点的綫段 $[x^0, x^1]$；以三个点 x^0，x^1，x^2 为頂点的三角形；以四个点 x^0，x^1，x^2，x^3 为頂点的四面体，分别是 0，1，2，3 維的单純形。

分别給予各个点 x^i $(i=0, 1, 2, \cdots, n)$ 以质量，使其总质量为 1，这时其重心的集合将是由这些点所張的 n 維单純形。由于 $x^i(i=0, 1, 2, \cdots, n)$ 是綫性无关的，从而把某个点用 x^i 的凸組合表示的系数 α_i 是唯一地确定的。因此，通常的重心 $\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{n+1}x^i$ 是不能由少于 $n+1$ 个正系数来表示的。此时，在 R^n 中凸組合的正系数的最小个数的上界 $n+1$ 正好适合。

如果 $\overline{x^0x^1\cdots x^n}\ni x$，$x=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i x^i$，則由

$$\|x\|=\left\|\sum_{i=0}^{n}\alpha_i x^i\right\|\leq\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\|x^i\|\leq\max_{0\leq i\leq n}\|x^i\|\sum_{i=0}^{n}\alpha_i=\max_{0\leq i\leq n}\|x^i\|,$$

所以单純形是有界集。

此外，从 $n+1$ 个頂点 $x^i(i=0, 1, \cdots, n)$ 除去一个点 x^i 后殘留下来的 n 个点，可以定出 R^n 的超平面 L_i。如果在由 L_i 所决定的半空間中，把包含 x^i 的記为 X_i，則根据解析几何中众所周知的事实，有

$$\overline{x^0x^1\cdots x^n}=\bigcap_{i=0}^{n}X_i.$$

因为各个 X_i 是閉集，所以作为它們的公共部分的单純形仍为閉集。因而单純形是有界閉集，卽成为紧集。此外，由于 X_i 的开核 X_i^0 是从 X_i 中除去超平面 L_i 后所殘留下来的部分，所以 $\overline{x^0x^1\cdots x^n}$ 的开核为 $\bigcap_{i=0}^{n}X_i^0$。就是說，在单純形的点里面，所有凸組合系数全是正的点是內点，系数中有 0 的是境界点。

注意 1　取 R^n 中任意的非空凸集 X，将包含着 X 的 R^n 的維数最低的綫性子空間中的一个記为 R^m，則 X 必包含 R^m 的內点。根据 R^m 的規定方

法，可知存在着下列事实：对于 X 的适当的 $m+1$ 个点 $x^i(i=0,1,2,\cdots,m)$，$\overrightarrow{x^i}$ 是綫性无关的。因 X 包含着由这些点所張成的 m 維单純形，由上所述可知，这个单純形必含有 R^m 的內点。因此，R^n 的有界凸集是 m 維凸体（对适当的 $m(0\leqq m\leqq n)$ 而言）。

注意 2 §4 (iv) 的結果在 $X^0=\phi$ 的情况下也是成立的。为了説明这一点，可由 $(\overline{X})^0\neq\phi$ 来导出 $X^0\neq\phi$. 如取 $\overline{X}$ 的內点 c 与其适当的邻域 $U(c,\varepsilon)\subset\overline{X}$，則显然 $U(c,\varepsilon)$ 包含着某个 n 維单純形 $\overline{x^0x^1\cdots x^n}$. 但是，由于各个 $x^i\in\overline{X}$，故若在 x^i 的充分小邻域取 X 的点 y^i，則这些点可认为是由扩張 n 維单純形 $\overline{y^0y^1\cdots y^n}$ 而得的，因而

$$\phi\neq(\overline{y^0y^1\cdots y^n})^0\subset X^0.$$

单純形分划 現在来考察把一个单純形 $S=\overline{x^0x^1\cdots x^n}$ 分划成几个 n 維小单純形的方法。虽然分划的方法很多很多，但其中較重要的一种是所謂重心分划。我們先来説明低維情况下的分划方法，再进而叙述高維的情况。

(0) **0 維单純形** 由于一个点 x^0 不能够按上述办法来分划，所以它本身就可看作重心分划。

(1) **一維单純形** 取 $\overline{x^0x^1}$ 的重心 y，就可以分划为两个一維单純形 $\overline{x^0y}$, $\overline{x^1y}$.

(n) **n 維单純形** $\overline{x^0x^1\cdots x^n}$ 的 $n+1$ 个 $n-1$ 維的边单純形❶，可以分別分划为 $n!$ 个 $n-1$ 維小单純形。取 S 的重心 y，作这些 $n-1$ 維小单純形 T 与 y 的凸包，則它是 n 維的单純形。故 S 总共可以分划为 $(n+1)!$ 个这样的小单純形。



图 6.1

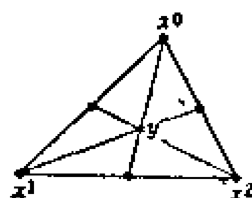


图 6.2

❶ 以单純形 $\overline{x^0x^1\cdots x^n}$ 的頂点 $x^0, x^1, \cdots, x^n$ 的一部分所作成的单純形 $\overline{x^{i_0}x^{i_1}\cdots x^{i_m}}$，叫做 m 維边单純形。

单純形的直徑　所謂集合 X 的**直徑**，可由下式来定义：

$$d(X)=\sup\rho(x,\ y)\quad (\text{对一切 } x,\ y\in X).$$

这样，在 n 維单純形 S 上，由超过一次的重心分划所得的小单純形 S' 的直徑为

$$d(S')\leqq\frac{n}{n+1}d(S). \tag{6.1}$$

証明　首先，对于 $S=\overline{x^0x^1\cdots x^n}$，設

$$\delta=\max_{0\leqq i,\ j\leqq n}\rho(x^i,\ x^j),$$

則显然有

$$d(S)\geqq\delta.$$

因任意的 a, $b\in S$ 是 x^i 的凸組合，故以 λ_i, μ_i 为凸組合的系数，則

$$\rho(a,\ x^j)=\|a-x^j\|=\left\|\sum_{i=0}^n\lambda_ix^i-x^j\right\|$$

$$=\left\|\sum_{i=0}^n\lambda_i(x^i-x^j)\right\|\leqq\sum_{i=0}^n\lambda_i\rho(x^i,\ x^j)\leqq\delta.$$

因此

$$\rho(a,\ b)=\left\|a-\sum_{j=0}^n\mu_jx^j\right\|=\left\|\sum_{j=0}^n\mu_j(a-x^j)\right\|$$

$$\leqq\sum_{j=0}^n\mu_j\rho(a,\ x^j)\leqq\delta.$$

所以

$$d(S)=\delta.$$

对 $n=0$，(6.1) 显然成立，我們假定关于 $n-1$ 維以下的单純形(6.1)是成立的。S' 的頂点的一个是 S 的重心

$$y=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^n x^i,$$

設其他頂点为 y^1, y^2, $\cdots$, y^n，則 $\overline{y^1y^2\cdots y^n}$ 是由 S 的 $n-1$ 維边单純形 T 的重心分划而得的单純形，故由归納法假設

30590

$$\max_{1\leq i,j\leq n}\rho(y^i, y^j)=d(\overline{y^1y^2\cdots y^n})\leqq\frac{n-1}{n}d(T')$$

$$\leqq\frac{n}{n+1}d(S), \tag{6.2}$$

且

$$\rho(y, x^j)=\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}x^i-x^j\right\|$$

$$\leqq\sum_{i\neq j}\frac{1}{n+1}\|x^i-x^j\|\leqq\frac{n}{n+1}d(S).$$

因而，对 S 的任意点 a，亦即对 $x^0, x^1, \cdots, x^n$ 的凸組合，有

$$\rho(y, a)\leqq\frac{n}{n+1}d(S),$$

特别，对 $a=y^j(j=1, 2, \cdots, n)$，有

$$\rho(y, y^j)\leqq\frac{n}{n+1}d(S). \tag{6.3}$$

故由(6.2)，(6.3)得

$$d(S')\leqq\frac{n}{n+1}d(S).$$

§7 价格与基本单純形

在 R^n 的点 $p=(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 中滿足

$$p_j\geqq 0, \quad \sum_{j=1}^{n}p_j=1$$

的点的集合，是以 $e^i=(\overbrace{0, \cdots, 0}^{i}, 1, 0, \cdots, 0)\ (i=1, 2, \cdots, n)$ 为頂点的 $n-1$ 維单純形 $\overline{e^1e^2\cdots e^n}$。由于在下一章中常常要把它用作 R^n 的基本单純形，現在我們用記号 S_n 来表示它❶。因 S_n 在 R^n 中的开核是空的，故把这看作为 $n-1$ 維凸体的开核可用 S_n^0 来表示。

❶ 由于 S_n 是 $n-1$ 維单純形，照理說应当記为 S_{n-1}，但为了叙述簡单起見，就把它記为 S_n 了。

S_n^0是在S_n的点中满足$p_j>0$ $(j=1, 2, \cdots, n)$的点的集合。虽然，S_n的点可以解釋为由n个元素所构成的空間的概率分布，但是在經济理論上，它是用来表示被規范化(normalized)的价格体系的。

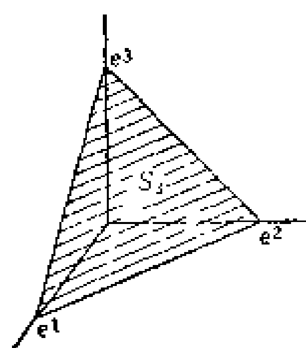


图 7.1

如果对一般形式的价格体系$p=(p_1, p_2, \cdots, p_n)$，$p_j\geqq 0$，$p\neq 0$乘上正数 $\lambda=1\Big/\sum_{j=1}^{n} p_j$ 加以規范化，则$\lambda p\in S_n$。当成为分析对象的各个經济上的量，其相互間的关系是关于价格的零次齐次函数时，由于只有相对价格(即各种財貨的价格比)才是本质上重要的，所以只限于考察規范化的价格体系这一点是可以容許的。

将p規范化的方法，除此以外还有很多。例如，将某种財貨的价格作为1的方法等等。为了下一章中理論的考察，希望确保任何一种財貨的价格皆可为0的可能性，采用以下的步驟。当价格体系为p，財貨組为x时，內积px表示x的价額。如果构成財貨組的每种財貨各取1个单位，即$u=(1, 1, \cdots, 1)$，则由于$pu=\sum_{j=1}^{n} p_j$，再乘上一个使u的价額变为1的正数λ后，便是上述的規范化方法。

由于S_n是紧的凸集，上述規范化的步驟当在把問題作数学处理时极为有效。这些将在下一章中討論。

紧集的凸包 R^n的非空紧集X的凸包$C(X)$同时也是紧的。这个定理虽然稍为有点特殊，由于它为第2章中严密的討論所必需，故在这里我們給出它的証明。

証明 有界这一点显然能成立，現在直接来証明$C(X)$是紧的。由§5可知，$C(X)$是X的$n+1$个任意点的凸組合的全体之集合。若作$n+1$个X与基本单純形S_{n+1}的直积

$$\underbrace{X\times X\times\cdots\times X}_{n+1}\times S_{n+1}, \tag{7.1}$$

则由于直积的因子 X, S_{n+1} 是紧的,所以(7.1)也是紧的❶。因为 $C(X)$ 是从这紧集(指直积(7.1))到 R^n 的連續映象

$$(x^0, x^1, \cdots, x^n, p) \to \sum_{i=0}^{n} p_i x^i$$

下的象,所以它是紧的。这是因为紧集在連續映象下的象也是紧的緣故❷。

紧的凸集的矢量和 在§2的应用例2中,已証明了有限个凸集的矢量和是凸集,由于那时候所使用的仿射映象是連續的,故若这些凸集是紧的,则直积 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_s$ 也是紧的,因此,連續映象下的象的矢量和也是紧的。

§8 效用指标与消費者行动

經济上的財貨,最終目的都是为了满足消費者直接或間接的需要。就这种意义而言,消費者对給与他的各种財貨的欲望满足的程度,即所謂**效用**(utility)来說,是純粹由消費者个人来判断其价値的。以上的看法,是 S. Jevons, C. Menger, L. Walras 等人的边际效用学派的傳統观点。在本书中,不介紹这个学說的历史,而专从数学的观点来看問题。

消費者对任意两个財貨組

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

究竟爱好哪一个?或者两者都同等程度地爱好?作为其比較标准,我們用**二項关系** $x\rho y$ 来表示,它应当满足以下一些条件。

給定一个可以判断其效用的財貨組全体的集合 X (习惯上,設 $X = R^n_+$),则对于 $x, y, z \in X$,下列关系:

$$x\rho y \quad 或 \quad y\rho x \tag{8.1}$$

至少有一个成立,或两者同时成立。当 $x\rho y$, $y\rho x$ 两者同时成立时,则称 x 与 y **无差别**(indifferent)。关系 ρ 应当满足**反射律**

❶ 見入江[23]第94頁定理8.

❷ 見入江[23]第93頁定理7.

$$xρx,\tag{8.2}$$

并且**推演律**

$$\text{若 } xρy,\ yρz,\ \text{則 } xρz\tag{8.3}$$

也成立。就是說，被規定的 $ρ$ 应理解为在 X 上具有完全的順序关系。但必須要注意 $x \neq y$，而 x 与 y 无差别的这一情况。当 x 与 y 具有无差别的关系时，記为 xIy。I 是一个**等价关系** (equivalence relation)[1]，为了将含于 X 中的財貨組加以分类，将彼此是无差别的东西归为一个集合。就是說，把 $x \in X$ 任意地固定后，則所謂等价类 $\{y\ y \in X,\ xIy\}$ 中的各个元素称为**无差别象** (indifference map)。任意的 $y \in X$ 不論属于哪一个无差别象，它就不会属于二个互相有差异的象。

如果 $x, y \in X$，由于根据一般慣例，对 x 与 y 的凸組合可以作出效用判断，所以 $[x, y] \subset X$。就是說，X 作为凸集合，尤其是它成为經济活动的集合时，将其假定为閉集是很自然的。根据效用判断的性质，可以对記号 $ρ$ 作下面的假定：当 $x, y, w \in X$ 时，如果

$$z \in [x, y],\ xρw,\ yρw,\ \text{則 } zρw.\tag{8.4}$$

这个性质是說，若設 w 无差别，或者比之更好的財貨組的全体所成的集合为 $X_w = \{x | x \in X,\ xρw\}$，則 X_w 不外乎是凸集而已[2]。

在 X 的点 x 上給与实数值 $u(x)$，当按 $ρ$ 的順序与函数値 $u(x)$ 的大小完全对应时，則 $u(x)$ 叫做 $ρ$ 的**效用指标**。若 u 是一个效用指标，f 是严格单調增加函数，則 $v(x) = f(u(x))$ 也是效用指标。在 $ρ$, X 上需要加上什么样的条件，才可以証明效用指标的存在性？象这样的問題是饒有趣味的，虽然如此，在本书中沒有余裕来涉及这个問題，只好在别的机会再詳細討論它[3]。現在我們

---

[1] 参看河田[22]第 10 頁(中譯本，第 12 頁——譯者注)。

[2] 有时也称为凸选好順序(convex preference ordering)。

[3] 关于这个問題，例如，可以参考：G. Debreu: Representation of a preference ordering by a numerical function; Decision processes (M. R. Thrall, C. H. Coombs and R. L. Davis, ed., 1954)。

不妨假定效用指标的存在性，继續叙述下去。

如果 ρ 满足(8.4)，ρ 的效用指标也满足

若 $z\in[x, y]$，且 $u(x)$，$u(y)\geqq\omega$，则

$$u(z)\geqq\omega, \tag{8.5}$$

反之亦成立，这里的 ω 是实数。满足(8.5)的函数叫做**拟凹函数**。若 $-u(x)$ 为拟凹函数，则 $u(x)$ 叫做拟凸函数。

拟凹函数的条件(8.5)，比众所周知的**凹函数**的条件：如果 $\alpha, \beta\geqq 0$，$\alpha+\beta=1$，则

$$\alpha u(x)+\beta u(y)\leqq u(\alpha x+\beta y) \tag{8.6}$$

来得弱一些。所謂凸函数 $u(x)$ 是 $-u(x)$ 为凹的函数。虽然凹(凸)函数在 $X(\subset R^n)$ 的开核 X^0 (非空集)上很显然是連續的❶，然而拟凹(拟凸)函数却不一定是連續的。因而，对于效用指标，除了拟凹性以外，通常还要設置連續性的假定。Arrow-Debreu 对于效用指标，除了連續性之外，还假定：

如果 $z\in(x, y)$，$u(x)>u(y)$，则

$$u(z)>u(y). \tag{8.7}$$

在連續性的假定下，如果(8.7)成立，则拟凹性也成立❷，然而反过来則不一定成立。如图 8.1 所示，若 y 的属于无差别的集具有"厚度"，則在綫段 (x, y) 上的点 z 与 y 是无差别的。由是可知，拟凹性的规定是比較(8.7)来得弱的假定。

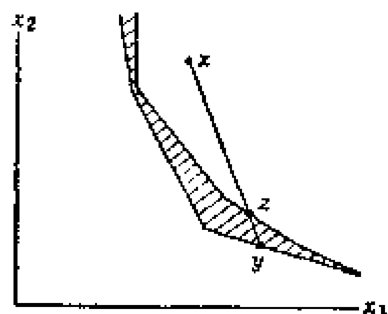


图 8.1

习惯上，象上面所說的，将 X 設为正象限 R^n_+ 的全体或者其子集，当成为效用判断对象的財貨，只是所謂消費財貨时，由于通常需要的是非負的量，故这样的假定是适当的。消費者也可以作为被雇佣者，因而也可以看成是出卖劳动力，因而是其他基本生产要素的供給者。如果这一些类型的財貨对于消費者說具有"非

---

❶ 例如，可参看 Bourbaki [3] 第 92 頁。

❷ 如果 $u(x)>u(y)\geqq\omega$，則显然由(8.7)可推出(8.5)。若 $u(x)=u(y)=\omega$ 且 $z\in[x, y]$，$\omega>u(z)$，则由条件(8.7)与 u 的連續性可知，对于与 z 充分接近的 $a\in(y, z)$，有 $\omega>u(a)>u(z)$。然而，由于 $z\in(x, a)$，并且 $u(x)=\omega>u(a)$，故由条件(8.7)，得出 $u(z)>u(a)$，这样就产生了矛盾 $u(z)>u(z)$。

效用”，則我們就可以对具有負的分量的財貨組来作效用判断了。Arrow-Debreu 从这种观点出发，认为 X 不一定要是包含正象限的凸集。然而，即使在这种情况下，也要假定 X **下面有界**。所謂下面有界的意思，是指：有一些实数 $\xi_j(j=1, 2, \cdots, n)$，对于一切 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in X$，成立着

$$x_j \geqq \xi_j \quad (j=1, 2, \cdots, n).$$

在一定期間，譬如說，24 小时以内可能供給的劳动量是有限的，此外，維持生命还不够的消費財貨的数量是不能成为效用判断的对象的。基于这样的理由，所以为何要假定下面有界就很明白了。

效用最大原則　在完全竞爭的假定之下，各个消費者把价格看成是用自己的力量不能改变的所与条件，换言之，把它当作一定的限制条件进行活动的。在給定的价格体系 $p=(p_1, p_2, \cdots, p_n)\neq 0, p_j\geqq 0$ 給定的所得 $I>0$ 之下，消費者所购进的財貨組 $x\in X$ 必須服从限制条件

$$px \leqq I. \tag{8.8}$$

(8.8) 称为**預算制約式**(budget constraint)。在这个条件之下，消費者可以选擇能使效用指标 $u(x)$ 为最大的財貨組 $x\in X$ 的需要量。这样选擇出来的 x 所表示的总是在最終价格与收入作为所与条件給定下的消費者的购入計划，乃至訂貨单；是一种事前的东西，不一定与事后的实現値相一致。由上述的看法可知，价格与所得的各个值是对应的，作为清单中的需要量因而可以得到确定，这样，由价格 p，收入 I 到財貨組 x 的对应称为**需要函数**。

关于需要函数，在把經济体系全体作为均衡問題来处理的第 2 章中将要談到。这里，我們来証明，在一切財貨的价格 p_i 为正时，并在預算制約式之下，使效用指标实际上达到最大値的最适当的財貨組 x 的全体，将成为一个凸集。

首先，由于这个最大值問題的变域是

$$X\cap\{x \mid px\leqq I\},$$

故由 $x\in X$, $px\leqq I$, 有

$$\xi_j\leqq x_j\leqq I/p_j \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

所以这变域是有界的。其次，X 与 $\{x|px\leqq I\}$ 同时都是閉的凸集，故作为其公共部分的变域(非空集)仍然是閉的凸集，换言之，是緊的凸集。因此，由众所周知的 Weierstrass 定理❶，連續函数 $u(x)$ 在这个变域上达到最大值。現在，对于 p, I, 把使得 $u(x)$ 为最大的变域內 x 的集合記为 $\varphi(p,\ I)$. 設 x, $y\in\varphi(p,\ I)$, 并将上述的最大値用 ω 表示，則有

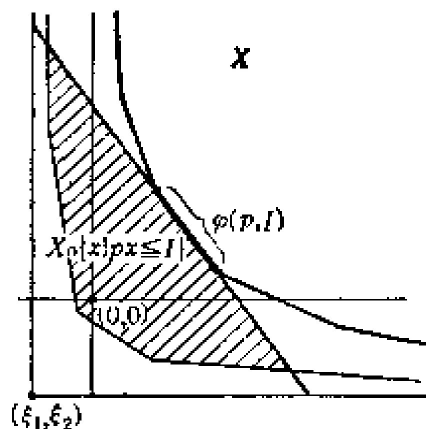


图 8.2

$$u(x)=u(y)=\omega.$$

此外，由于变域为凸集，所以，它包含綫段 $[x,y]$, 更进一步，由于 $u(x)$ 为拟凹函数，故若 $z\in[x,\ y]$, 則 $u(z)\geqq\omega$. 但是，根据記号 ω 的意义，必有 $\omega=u(z)$. 結果，有

$$u(z)=\omega, \quad \text{而} \quad z\in\varphi(p,\ I).$$

如上述証明，由于 $\varphi(p,\ I)$ 的函数值是集合，所以需要函数一般是**多値函数**或**多値映象**。如果用别的表示法，則使点 $(p,\ I)$ 对应于集合 $\varphi(p,\ I)$，是一种**点对集合映象**。在这里，虽然需要函数的变数是 p, I，但当經济体系全盘的关系显得重要时，I 成为 p 的一次齐次函数，其結果是，限制条件亦成为一次齐次的，最后 $\varphi(p,\ I)$ 是关于 p 成为 0 次齐次的了。由于这个緣故，所以只要考虑規范化了的 p 就可以。

关于效用指标的特殊假定 对于 R^n 的两个点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)$，当 $x_j\geqq y_j\,(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 时，記为 $x\geqq y$; 当 $x\geqq y$ 而 $x\neq y$ 时記为 $x\geqslant y$; 在 x 的各坐标分量比 y 的各对应分量大的时候，記为 $x>y$. 如果照这样的記法，則 R^n_+ 是 $x\geqq 0$ 的点的集合，开核 $(R^n_+)^0$ 是 $x>0$ 的点的集合。

当 x, $y\in X$ 且 $x\geqq y$ 时，若 $u(x)\geqq u(y)$，則称 $u(x)$ 为**单調遞增**

❶ 見入江[23] 96 頁定理 10，高木 [24] 31 頁定理 13.

的。若 $x \geqq y$，而 $u(x) > u(y)$ 时，則称为**严格单調递增**。在財貨的数量愈多愈好的这种意义下，关于多数消費財貨与劳动（說得更正确些，是負的劳动量，因而把它叫做閑暇(leisure)会更好一些），这样規定是妥当的。当 $u(x)$ 是严格单調递增时，对于任意的 $x \in X$，若可选擇充分小的正数 $\lambda > 0$，使当 $x_\lambda = (x_1, \cdots, x_{j-1}, x_j + \lambda, x_{j+1}, \cdots, x_n) \in X$ 时，則有 $u(x_\lambda) > u(x)$。在 Arrow-Debreu 的不一定以 $u(x)$ 的严格单調性作为前提的情况之下，对于任意的 $x \in X$，可以选擇适当的 $\lambda > 0$，$x_\lambda \in X$，并且 $u(x_\lambda) > u(x)$ 成立，則把第 j 种財貨叫做**被需求的財貨**。根据以上所述，因 $u(x)$ 是严格单調的，对任意的 $x \in X$，若 $x + R^n_+ \subset X$（矢量和）成立，則所有的財貨都是被需求的財貨。

当 $u(x)$ 具有在 X 全部区域上的最大值时，将最大点 x 叫做**飽和点**。当存在着被需求財貨的时候，飽和点是不存在的。

利潤最大原則　現在我們来研究：一个以完全竞爭为其主导思想而活动的生产单位（企业等），在規定的价格体系 $p \geqq 0$ 之下，究竟从所有的生产活动集合 Y 之中，应采用什么样的生产活动 y。如前所述，由于在 y 的諸分量中，正的表示产品，負的表示投入物，內积 py 表示从产品的总价值中减去生产費用后的余額，换言之，即表示利潤。故所謂在价格 p 之下最为有利的生产活动是：对于 $y \in Y$，利潤 py 成为最大的那种活动。为了使利潤最大，生产单位当然尽量采取这样的生产活动。这正是在規定的价格之下决定生产計划的一項原則，它叫做利潤最大原則。但是要注意，这是与前面所讲效用最大的情况有区别的，譬如說，虽然 p 为正，然而 $\max_{y \in Y} py$ 却不一定存在。

关于这一个微妙的問題，留待第2章再来討論。

第2章 Walras式平衡模型与不动点定理

在以前几节中时而讲到的材料，主要是对生产（§3，§8）与消費者需要（§8）进行逐个的分析。作为經济主体的行动原则，在管理生产企业方面显然是利潤最大原則，而作为一个对所需要財貨的选擇主体的消費者（或家庭經济）来說，则是效用最大原則。在完全竞爭的假定之下，对应于給定的价格，根据上述这些原則，可以在一方面决定生产量（即供給），而另一方面决定需要。然而，这样所决定的需要与供給的預定計划，总是与作为限制条件而任意給定的价格相对应的。由于需要与供給不一定会平衡，因此在不平衡的情况下，預定計划的实現也就不可能了。只是对于某些特定的价格，計划所要求的供求得到平衡，在两种預定計划量相一致的点上定出作为实現值的需要、供給和价格。以上所述，是从 Walras, Pareto 以来成为一般平衡理論的基础思想。然而，作为这样的接近法的基础定理之一，必須首先明确所謂"需要計划＝供給計划"这样的关系式中是不包含矛盾的。换言之，如果把这关系式用数学方法表示成为方程或不等式时，它必須有具备經济学意义的解。由于問題的微妙和复杂的数学特性，关于确立解的存在性，直到現在还沒有被认識到。这期間，关于一般平衡理論的基础研究，只不过是重复着将未知数个数与方程个数作比較的那些工作。从 Walras, Pareto 开始，現代数理經济学家如 Hicks, Samuelson 等人的研究都是建筑在这样很脆弱的基础之上。但是，作为例外，应当特别提一下 von Neumann 模型❶与由 A. Wald 作出的平衡解的存在証明❷。为了把經济模型数学地定式化，确証解的存在性，为經济理論奠定坚实的基础，以及进行后面的詳細分析，这些（指 von Neumann 与 A. Wald 的工作）都是遵循理論上正确的方向的成果。但是，虽然 von Neumann 模型是結构完美，具有特色的模型，但在許多地方与正統的 Walras 等的平衡模型有許多不同之处。此外，尽管其所处理的模型也称为 Walras-Cassell 体系，Wald 的結果也是在放弃后文所述的 Walras 法則

---

❶ 参看 von Neumann [10] 二階堂[13]，[14]等，后者包含着由分离定理而得的簡单証明。

❷ 参照 Wald [18]，[19]，Kuhn [7]。

这一点和为此所付的代价而又要采用种种狭隘的假定这一点上来取得的，故它們对于构成 Walras 式平衡理論的基础都是不够的。关于满足 Walras 式法则的正統的平衡模型的解的存在問題，从 Walras 以来經历了很長一段空白时期，最近好容易才肯定得到了解决。以 Arrow 与 Debreu 的共同研究为起点的 McKenzie, Gale 与二階堂等人的工作是沿着这一方向所取得的成果❶。以下，将要叙述 Walras 模型的簡练的、近代的面貌，并利用凸集的重要性质作为輔助，来証明解的存在性。

§9 单純交換模型

为了很快具体地掌握平衡解存在問題的輪廓，先从簡单的情况开始。虽說是簡单，这里所讲的单純交換模型却具备着問題本质的全部要点，后面要讲的一般的模型不过是在这上面再加上一层画工的彩色。这样的說法是并非言过其实的。

設有 m $(m\geqq 2)$ 个消費者 i $(i=1, 2, \cdots, m)$，各个 i 拥有的財貨組为

$$\zeta^i=(\zeta_1^i, \zeta_2^i, \cdots, \zeta_n^i)\geqslant 0, \tag{9.1}$$

至于 ζ^i 如何归为 i 所有，对今后所要考虑的問題并不具有重要意义，譬如說，設他們是自耕农，那末可以将 ζ^i 看作由他們劳动所得的产品的数量。現在我們来看将这些 ζ^i 在市場上进行交换的問題。

首先，假設

$$\sum_{i=1}^{m}\zeta^i>0. \tag{9.2}$$

(9.1)是各个 i 实际拥有的財貨，而(9.2)則是成为交换对象的各人所具有的財貨的总数，显然各財貨的存量都是正数，形成交换媒介的是价格 $p>0$。

現在，設各个 i 具有效用指标 $u_i(x)$，这些是在正象限 R_+^n 上

❶ 参看 Arrow-Debreu [2]，Gale [4]，McKenzie [8] 二階堂[15]，[16]。

定义的，并且假定在这变域是連續、拟凹与严格单调的。当价格为 p 时，i 的持有量 ζ^i 的总价額是內积 $p\zeta^i>0$，这是将全部持有量卖掉后的收入。

把这收入再投入市場，在限制条件

$$p x \leqq p \zeta^i, \quad x \geqq 0 \tag{9.3}$$

之下，使

$$\max u_i(x) = u_i(\hat{x}^i), \tag{9.4}$$

就是說，要购入的东西，应当使效用最大。一般地，$\hat{x}^i \neq \zeta^i$，$\zeta^i-\hat{x}^i$ 是純供給量（正的分量为純供給，負的分量为純需要），这样的純供給量实际上是出現于市場的。但是为了理論上考察方便，不妨把 $\hat{x}^i$，ζ^i 看作是 i 的需要量与供給量。这样一来，总的需要量便是 $\sum_{i=1}^{m}\hat{x}^i$，总的供給量是 $\sum_{i=1}^{m}\zeta^i$，为了实际进行交換，平衡条件

$$\sum_{i=1}^{m}\hat{x}^i = \sum_{i=1}^{m}\zeta^i \tag{9.5}$$

必須成立。显然，对于任意的价格 p，(9.5) 是不一定成立的。只是对于适当的价格 p，与对应于这个价格的适当需要量 $\hat{x}^i$ $(i=1, 2, \cdots, m)$，(9.3)，(9.4)，(9.5) 同时成立，这时各人的效用与收入相应（若追溯原来的話，即初期持有量）才能实际上达到最大値。

由于限制条件 (9.3) 是关于 p 的一次齐次式，由前所述，可把 p 看作被規范化了的价格体系，并且可設 $p\in S_n^0$。在那里，把問題重写为供求函数的形式，則对应于給定的价格 $p\in S_n^0$，作为 i 的預定計划的需要量应当是

$$\varphi_i(p)=\{x^i \mid x\geqq 0, \text{ 在 } px\leqq p\zeta^i \text{ 之下有 } \\ \max u_i(x)=u_i(x^i) \text{ 的那些 } x\}. \tag{9.6}$$

这就是 i 的需要函数，由于使 u^i 最大的 x^i 一般地說不是唯一的，所以 $\varphi_i(p)$ 是多值函数，說得更正确些，是与 S_n^0 的点 p 相对应的 R^n 的非空的、紧的凸集 $\varphi_i(p)$ 的点对集合映象（§8）。关于各个

i 的需要函数的总和是总需要函数

$$\varphi(p)=\sum_{i=1}^{m}\varphi_i(p). \tag{9.7}$$

因为各个 $\varphi_i(p)$ 是非空的、紧的凸集，因此作为这些集合的矢量和的 $\varphi(p)$ 也必定是非空的、紧的凸集(§2，应用例2及§7)。总供給函数

$$\psi(p)=\sum_{i=1}^{m}\zeta^i \tag{9.8}$$

是一个不管 p 取什么值都有着一个定值的单值函数(点对集合映象的特例)。用这些函数来写出时，$p\in S_n^0$ 是平衡价格这件事，是与条件

$$\psi(p)\in\varphi(p) \tag{9.9}$$

等价的。

其次，按照假定，u_i 为严格单調递增，所以 $x^i\in\varphi_i(p)$. 就是說，当 x^i 在預算的限制下使 u_i 最大时，需要量一定要将收入的全部都化費完，卽等式

$$px^i=p\zeta^i$$

成立。这是因为，对于使不等式 $px<p\zeta^i$ 成立的 $x\geqq 0$，只要取充分小的 $\varepsilon>0$，就有 $y=x+(\varepsilon, \varepsilon, \cdots, \varepsilon)$，$py\leqq p\zeta^i$，而因 $u_i(x)<u_i(y)$，x 就丢失了效用的最大点了。因而，关于各个 i，如果 $x^i\in\varphi_i(p)$，則 $px^i=p\zeta^i$ 成立，把这些合起来計算，于是

$$p\sum_{i=1}^{m}x^i=p\sum_{i=1}^{m}\zeta^i,$$

故

$$px=py \quad (\text{对任意的 } x\in\varphi(p),\ y\in\psi(p)) \tag{9.10}$$

成立。这个收支相等的条件叫作 **Walras 法則**。为了将随着財貨的供給而产生的全部收入用于財貨的购入，这是表示收入的完全循环的重要关系式。显然，这个法則所具有的直接有关經济学的

意义是非常重要的，然而，关連到当前的問題，必須特别强調这个法則在平衡解存在問題上所具有的重要性。这就是說，假若除去一些基于連續性的严密的假定，則单純交換模型与后面将要讲到的一般模型都具有平衡解这一事实，可以說大部分可由这个法則推出。效用最大，利潤最大等原則对平衡解存在的貢献却不是一般所相信的那样大。不管供求函数的背后隐藏着何等样的原理，就平衡的存在而言，只要 Walras 法則成立，本质上已經是充分的了。

上面所說的 Walras 法則的一些看法，主要是由于理論上的方便，如果在(9.10)中，用不等号来代替等号，

$$px \leq py \quad (\text{对任意的 } x \in \varphi(p),\ y \in \psi(p)) \tag{9.11}$$

則叫做**广义的 Walras 法則**。

§10 Arrow-Debreu 平衡模型

Arrow-Debreu 作出了一个模型，它是 Walras 式一般平衡模型的典型近代版❶。它綜合了从 Walras, Pareto 到 Hicks, Samuelson 在平衡体系的数学定式化方面的研究成果，并且除去了在平衡解存在問題上所設置的一些不必要的、狹隘的、古典的假定(諸如效用指标的可微分性，可微分的古典的生产函数概念等等)。然而这不是說，这里所讲的 Arrow-Debreu 模型在經济学上已經完美无缺了。虽然如此，纵使对于細节方面还能作出一些修正，但对于当前面临的問題(平衡解的存在)来說，是无关紧要的。

設全經济体系是由 l 个消費单位 $i(i=1, 2, \cdots, l)$，m 个生产单位 $k(k=1, 2, \cdots, m)$所构成，財貨的种类号碼用 $j(j=1, 2, \cdots, n)$ 表示。

以下，我們列举关于生产、消費的一些假定。

1 **生产** 各生产单位 k 应当具有能滿足§3中所說条件的活动的集合 Y_k. 把这些条件再說一遍：

❶ 参看 Arrow & Debreu [2].

I.a. Y_k 是含有0的凸的閉集， (10.1)

I.b. 若 $Y=\sum_{k=1}^{m} Y_k$，則 $Y\cap R_+^n=\{0\}$， (10.2)

I.c. $Y\cap(-Y)=\{0\}$. (10.3)

这里，$\{0\}$ 是只含有一个点0的集合。

II **选擇領域** 各消費单位 i 具有財貨选擇的領域 $X_i(\subset R^n)$，X_i 是凸的閉集，且下面有界。最后的条件意味着，若存在着每一組各个 i 的財貨組 ξ^i，則对于 X_i 的任意的 x^i，必有

$$x^i\geqq\xi^i. \tag{10.4}$$

III **效用指标**

III.a. 各个 i 具有在 X_i 上連續的效用指标 $u_i(x)$。

III.b. (非飽和的假定)各个 i 都有这样的性质：对于任意的 $x^i\in X_i$，使 $u_i(x^i)<u_i(y^i)$ 成立的 $y^i\in X_i$ 是存在的。

III.c. 如果 $u_i(x^i)>u_i(y^i)$，則对于 $z\in(x^i, y^i)$ 有

$$u_i(z)>u_i(y^i).$$

IV **利潤分配率** 对于每一組各个 i,k 給定一些实的常数 $\alpha_{ik}\geqq0$，且

$$\sum_{i=1}^{l}\alpha_{ik}=1\quad(k=1, 2, \cdots, m). \tag{10.5}$$

α_{ik} 的意义如下：当生产单位 k 的利潤为 π_k 时，消費单位 i 接受的利潤分配的限度是 $\alpha_{ik}\pi_k$。例如，这相当于对股票持有者所分配的紅利。(10.5)表示 π_k 要尽可能对全消費单位分配到。

V **初期持有量** 設各消費单位拥有財貨組 $\zeta^i\in R^n$.

在这里，定义 A–D 模型的**平衡条件**。当价格 $\hat{p}\in S_n$，消費单位 i 的需要量 $\hat{x}^i\in X_i$，生产单位 k 的生产量 $\hat{y}^k\in Y_k$ 的組合 $[\hat{x}^1, \hat{x}^2, \cdots, \hat{x}^l, \hat{y}^1, \hat{y}^2, \cdots, \hat{y}^m, \hat{p}]$ 满足下列条件时，称为是 A–D 模型的平衡解。

(i) **生产单位的利潤最大** 在每一組各个单位 k 上，有

$$\pi_k(\hat{p}) = \max \hat{p}y = \hat{p}\hat{y}^k \quad (\text{对于任意的 } y \in Y_k). \tag{10.6}$$

（ii）**消費单位的效用最大** 每組各个单位 i 上，在限制条件

$$x \in X_i, \quad \hat{p}x \leqq \hat{p}\zeta^i + \sum_{k=1}^{m} \alpha_{ik}\pi_k(\hat{p}) \tag{10.7}$$

之下有

$$\max u_i(x) = u_i(\hat{x}^i). \tag{10.8}$$

（iii）**供需平衡**❶

$$\sum_{i=1}^{l} \hat{x}^i \leqq \sum_{i=1}^{l} \zeta^i + \sum_{k=1}^{m} \hat{y}^k. \tag{10.9}$$

并且，对应于使 (10.9) 中不等号成立的分量的那种財貨 j 的价格是 $\hat{p}_j = 0$❷.

在以上基本假定 I～V 之下，关于 Arrow-Debreu 的平衡存在有

第 1 定理 若各 i 的持有量 ζ^i 为正，卽若 $z^i \in X_i$，如果存在着能使 $\zeta^i > z^i$ 成立的 z^i，則平衡解是存在的。

第 2 定理放松了第 1 定理上的稍为不大現实的假定（就是說，正的持有量的假定），作为其补偿的，是加强了关于效用指标与經济活动集合的假定。为了叙述第 2 定理，必須以在 § 8 最后一部分所介紹的"需求財貨"的概念作为基础，而首先来解釋"生产的"(productive)（卽投入財貨）財貨的概念。

設存在着为所有的消費单位同样需求的財貨，将这些財貨的号碼的集合記为 D，若 h 是某个財貨的号碼，如果对于任意的 $y \in Y$，有

(a) $y_h \leqq 0$, (10.10)

(b) Y 中存在着其他活动 y'（它与 y 是不同的），有

① $y'_j \geqq y_j$ （关于 h 以外的任意分量 j）, (10.11)

❶ 对于平衡均等条件(9.5)，可以称为广义的供需平衡条件。

❷ 因此，如果取对偶命题，則有若 $\hat{p}_j > 0$，則等号成立。

② $y'_h > y_d$　(关于至少一个的 $d \in D$)　　(10.12)

成立,則第 h 种財貨称为"生产的"財貨。

将"生产的"財貨的号碼集合記为 P, 則可以假定 $P \neq \phi$.

第2定理　持有量 ζ^i 满足下列条件。就是說,对每一組各个 i 若存在着 $z^i \in X_i$, $\zeta_i \geq z^i$ 的 z^i, 則至少对于一个 $h \in P$, 有 $\zeta_h^i > z_h^i$. 进一步, 存在着能使 $x^0 < y^0 + \zeta$ 的 $x^0 \in X$ 和 $y^0 \in Y$❶. 在这里, $X = \sum_{i=1}^{l} X_i$, $Y = \sum_{k=1}^{m} Y_k$, $\zeta = \sum_{i=1}^{l} \zeta^i$. 此外,上述的号碼 h 在每一組各个 i 处是不同的。在以上这些假定之下,存在着平衡解。

注意　在第2定理中当然假定着 $D \neq \phi$, 因此, III. b 这一条(非飽和的假定)自动地成立。

§11　供求函数的构成

Arrow-Debreu 为了証明上述二个定理,构成了博奕形式的抽象經济模型,而将平衡解的存在問題归結到这个上面去。虽然如此,本书所采取的方針,却是把它归結到以 Walras 法則为基础而定式化的 Gale-Nikadô 定理上去。为此,作为准备步驟,首先研究关于在 A-D 模型上 Walras 法則的成立与否。因此,有必要对比单純交換模型的情况討論得更細致一些,并且,这种考察,在平衡解存在証明的第一阶段也是必要的手續。在 §9 中,对于正的价格 p, 亦即对于基本单純形 S_n 的开核 S_n^0 上定义的需要函数(9.6),是可以构成直接的經济意义的。与之相反,在 §10 里所讲的模型的情况下,用具有这样意义的直接的方法来构成供求函数是困难的。A-D 模型与单純交換模型不同,由于平衡价格不一定是正的价格,因而不只是对 S_n^0, 而有必要对 S_n 全域上来定义供求函数。然而,对于任意的 $p \in S_n$, 效用最大值問題的变域的緊性不一定有保証,因此我們面临着 max $u(x)$ 不一定有意义的困难。一方面,在构成供給函数时,尽可能施行(10.6),由于 Y_k 一般不是緊的,故对于 $p \in S_n^0$, max py 恐怕要成为无意义。但是,实际上,即使在单純交換模型的情况,由于

❶　后半条件意味着如果忽視了价格状况、預算制約式、效用最大、利潤最大等条件, 由生产与持有財貨的供給, 把所产生正的超过供給部分的財貨分配到全部消費单位去是可能的。

直接地构成的供求函数(9.6)在数学上处理起来极为不便，故也要抛弃过分执着于这种經济学的解釋，而要采用更容易处理的方法。此外，就对作为本来目的的平衡解存在問題可能有用的形式再构造供求函数这一点也是首要的。以下，将首先对单純交换模型再定义其供求函数，以此为根据再对 A-D 模型构成供求函数，然后証明 Walras 法則成立。

单純交換模型的情况 在这种情况下，容易再构成需要函数。对总供給量 ζ，选取一个使 $a>\zeta$ 的財貨組 a，并且予以固定，如果作 R^n 的超立方体(cube)

$$E=\{x \mid 0\leqq x\leqq a\}, \tag{11.1}$$

則 E 是含于 R^n_+ 上的凸体，ζ 为其内点。

在(9.6) φ_i 的定义中，若将限制条件中的 $x\geqq 0$ 换以比之更强的条件 $x\in E$，在这新的限制条件下，使 $u_i(x)$ 最大的 x^i 的全体作为个别需要函数的值来定义，再把这个作为 φ_i，則

$$\varphi_i(p)=\{x^i \mid x\in E,\ px\leqq p\zeta^i \text{ 之下 } \max u_i(x)=u_i(x^i)\}. \tag{11.2}$$

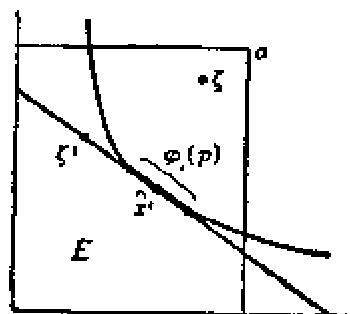


图 11.1

在这个时候，由于变域 $\{x \mid x\in E,\ px\leqq p\zeta^i\}$ 对任意的 $p\in S_n$ 是紧的凸集，所以連續函数 $u_i(x)$ 必定在其上达到最大值。故而 $\varphi_i(p)$ 定义于 S_n 全域上，而且，与以前情况一样，$\varphi_i(p)$ 成为非空的、紧的凸集，因而总需要函数 $\varphi(p)=\sum_{i=1}^{m}\varphi_i(p)$ 也是非空的、紧的凸集。此外，容易知道这个新的 $\varphi(p)$ 仍然满足 Walras 法則。

Arrow-Debreu 模型的情况 在这个情况下，构作超立方体 E 的方法要稍为巧妙一些，其作法如下[1]：

如前所述，首先令 $X=\sum_{i=1}^{l}X_i$，$Y=\sum_{k=1}^{m}Y_k$，假如平衡解

$$[\hat{x}^1,\ \hat{x}^2,\ \cdots,\ \hat{x}^l,\ \hat{y}^1,\ \hat{y}^2,\ \cdots,\ \hat{y}^m,\ \hat{p}]$$

[1] 根据 Arrow-Debreu [2].

存在，则由于条件(iii)的成立，必須满足条件

$$(\zeta+Y-X)\cap R_+^n\ni\zeta+\sum_{k=1}^m\hat{y}^k-\sum_{i=1}^l\hat{x}^i,$$

因此，如果对每一組各个 i, k 作集合

$$\widetilde{X}_i=\{x^i\,|\,x^i\in X_i,\ (\zeta+Y-\sum_{s\neq i}X_s-x^i)\cap R_+^n\neq\phi\},\quad(11.3)$$

$$\widetilde{Y}_k=\{y^k\,|\,y^k\in Y_k,\ (\zeta+y^k+\sum_{t\neq k}Y_t-X)\cap R_+^n\neq\phi\},\quad(11.4)$$

则由关于持有量的假定，以及 $0\in Y_k$，故知 $\widetilde{X}_i\neq\phi$, $\widetilde{Y}_k\neq\phi$，特别，有

$$\hat{x}^i\in\widetilde{X}_i,\quad\hat{y}^k\in\widetilde{Y}_k.$$

$\widetilde{X}_i$, $\widetilde{Y}_k$ 同时为閉的凸集这一点，从定义式(11.3)，(11.4)是容易明白的，現在进一步証明它們是有界集。

① $\widetilde{Y}_k$ 有界性的証明：設 $\widetilde{Y}_k$ 不是有界的，则必存在点列 $\{y^{k\nu}\}$, $y^{k\nu}\in Y_k$, $\|y^{k\nu}\|\to+\infty\,(\nu\to\infty)$. 由定义(11.4)，存在着点 $y^{t\nu}\in Y_t$, $x^{i\nu}\in X_i\,(\nu=1,2,\cdots)$，使

$$\zeta+y^{k\nu}+\sum_{t\neq k}y^{t\nu}-\sum_{i=1}^l x^{i\nu}\geqq0.$$

若利用(10.4)的下界 ξ^i，并設 $\xi=\sum_{i=1}^l\xi^i$，则

$$\zeta+\sum_{t=1}^m y^{t\nu}\geqq\sum_{i=1}^l x^{i\nu}\geqq\xi,$$

$$\therefore\quad\sum_{t=1}^m y^{t\nu}\geqq\xi-\zeta.\quad(11.5)$$

若設

$$\mu_\nu=\max_{1\leqq t\leqq m}\|y^{t\nu}\|,\quad(11.6)$$

则因 $\lim\limits_{\nu\to\infty}\mu_\nu=+\infty$，故对充分大的 ν, $\mu_\nu\geqq1$ 成立。考虑到 Y_t 是凸的，

$$\frac{1}{\mu_\nu}y^{t\nu}=\left(\frac{1}{\mu_\nu}\right)y^{t\nu}+\left(1-\frac{1}{\mu_\nu}\right)\cdot0\in Y_t$$

$$(t=1,2,\cdots,m).\quad(11.7)$$

在(11.5)的两边用μ_ν去除，使$\nu\to\infty$，则$\mu_\nu\to+\infty$，故

$$\sum_{t=1}^{m}(y^{t\nu}/\mu_\nu)\geqq(\xi-\zeta)/\mu_\nu\to 0. \tag{11.8}$$

此外，根据μ_ν的定义(11.6)，对于充分大的ν，

$$\|y^{t\nu}/\mu_\nu\|\leqq 1 \quad (t=1,2,\cdots,m), \tag{11.9}$$

就是說，由于$\dfrac{y^{t\nu}}{\mu_\nu}\in\bar{U}(0,1)$，例如，由$\bar{U}(0,1)$的紧性，所以在每一組各个$t$上不妨假定

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{y^{t\nu}}{\mu_\nu}=y^{t0}. \tag{11.10}$$

因为各个Y_t为閉集，故$y^{t0}\in Y_t$一事自不待言。此外，由(11.8)，有$\sum\limits_{t=1}^{m}y^{t0}\geqq 0$。故而，因为

$$\sum_{t=1}^{m}y^{t0}\in Y\cap R^n_+,$$

由假定 I. b，得

$$\sum_{t=1}^{m}y^{t0}=0. \tag{11.11}$$

把t任意地固定，

$$y^{t0}=\overbrace{0+\cdots+0}^{m-1}+y^{t0}\in Y, \tag{11.12}$$

同时，由(11.11)有

$$-y^{t0}=0+\sum_{s\neq t}y^{s0}\in Y. \tag{11.13}$$

根据(11.12)，(11.13)，得$y^{t0}\in Y\cap(-Y)$。因而，由假定 I. c 可知，$y^{t0}=0$。由于这是对任意的t都成立的，故关于各个t有

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{y^{t\nu}}{\mu_\nu}=y^{t0}=0,$$

就是說，

$$\lim_{\nu\to\infty}\left\|\frac{y^{t\nu}}{\mu_\nu}\right\|=0 \quad (t=1,2,\cdots,m).$$

故而应当有

$$\max_{1\leq i\leq m}\left|\frac{y^{i\nu}}{\mu_\nu}\right|\to 0 \quad (\nu\to\infty).$$

但是，根据 μ_ν 的定义(11.6)，必須有

$$\max_{1\leq i\leq m}\left|\frac{y^{i\nu}}{\mu_\nu}\right|=1,$$

这就引出了矛盾。定理証明完毕。

② $\widetilde{X}_i$ 有界性的証明：利用①的結果来証明。若 $x^i\in\widetilde{X}_i$，則存在着 $y^k\in Y_k$，使

$$\zeta+\sum_{k=1}^{m}y^k-\sum_{i=1}^{l}x^i\geqq 0. \tag{11.14}$$

由于 y^k 对(11.14)成立，显然 $y^k\in\widetilde{Y}_k$. 故而利用 $\widetilde{Y}_k$ 的有界性，就有

$$\xi^i\leqq x^i\leqq\zeta+\sum_{k=1}^{m}y^k-\sum_{s\neq i}x^s\leqq\zeta+\sum_{k=1}^{m}y^k-\sum_{s\neq i}\xi^s,$$

故 x^i 上下都是有界的。

由以上所述，$\widetilde{X}_i$, $\widetilde{Y}_k$ 是非空的、紧的凸集，假定存在着平衡需要量 $\hat{x}^i$，平衡生产量 $\hat{y}^k$，則易知 $\hat{x}^i\in\widetilde{X}_i$, $\hat{y}^k\in\widetilde{Y}_k$. 同时，根据定义，显然有

$$\widetilde{X}_i\subset X_i, \quad \widetilde{Y}_k\subset Y_k.$$

供求函数的构成　选定一个在其开核中包含全部 $\widetilde{X}_i$, $\widetilde{Y}_k$($i=1, 2, \cdots, l$; $k=1, 2, \cdots, m$)的充分大的超立方体，記为 E. 用到这个 E 时，显然 $X_i\cap E$, $Y_k\cap E$ 分别是非空的、紧的凸集。

有了以上的准备之后，可以用下面的方法来构作供求函数。

首先，生产单位的供給函数 $\psi_k(p)$ 与利潤函数 $\pi_k(p)$，对于每一組各个 k，是由 S_n 上的下列式子：

$$\psi_k(p)=\{y^k \mid y\in Y_k\cap E \text{ 之下有 } \max py=py^k\}, \tag{11.15}$$

$$\pi_k(p)=\max py \text{ (在限制条件 } y\in Y_k\cap E \text{ 之下)} \tag{11.16}$$

来定义的。容易証明，(11.16)是单值連續函数。

其次，同样地，消費单位的需要函数 $\varphi_i(p)$，对每一組各个 i，是由 S_n 上的

$$\varphi_i(p)=\left\{x^i \mid x\in X_i\cap E,\ 在\ px\leqq p\zeta^i+\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik}\pi_k(p)\ 之下有\right.$$

$$\left.\max u_i(x)=u_i(x^i)\right\} \tag{11.17}$$

来定义的。故而，总的供求函数是

$$\psi(p)=\zeta+\sum_{k=1}^{m}\psi_k(p), \tag{11.18}$$

$$\varphi(p)=\sum_{i=1}^{l}\varphi_i(p). \tag{11.19}$$

以上这些函数是对一切的 $p\in S_n$ 来定义的，它的象都是非空的、紧的凸集。此外，$\varphi_i(p)$，$\psi_k(p)\subset E$ 自不待言.

Walras 法則　設 $x^i\in\varphi_i(p)$，$y^k\in\psi_k(p)$，則由預算制約式可得

$$px^i\leqq p\zeta^i+\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik}\pi_k(p),$$

对 i 求和，于是有

$$\begin{aligned} p\sum_{i=1}^{l}x^i &\leqq p\sum_{i=1}^{m}\zeta^i+\sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik}\pi_k(p)\\ &=p\zeta+\sum_{k=1}^{m}\pi_k(p)\sum_{i=1}^{l}\alpha_{ik}\\ &=p\zeta+\sum_{k=1}^{m}\pi_k(p)=p\zeta+p\sum_{k=1}^{m}y^k. \end{aligned}$$

因而，对于 $x\in\varphi(p)$，$y\in\psi(p)$，有 $px\leqq py$，即广义 Walras 法則成立。

§12 原型的平衡与供求函数的平衡，其等价性

在前节中，由于規定了适当的超立方体 E，因而能够构成供求函数。然而，这些函数不一定与原来模型的經济学的意义相适应。例如在(11.16)中，

点 $y^k \in \psi_k(p)$ 虽然在变域 $Y_k \cap E$ 中是利潤最大点，但在变域 Y_k 中却不一定是利潤最大点。虽然这一点初看起来是不合适的，然而在平衡点上，这个不合适的情况可以巧妙地回避过去。将原型中的效用，利潤最大值問題的变域限定在超立方体 E 之內，所得的是 §11 的供求函数。因此，显然原型的平衡解就是供求函数的平衡解。本节将証明反面的事情也成立，就是說，供求函数的平衡解实际上就是原型的平衡解。

单純交換模型的情况 如对于把(11.2)的 $\varphi_i(p)$ 累計而得的总需要函数 $\varphi(p)$，有平衡价格 $\hat{p} \in S_n$ 存在，設 $\varphi(\hat{p}) \ni \zeta$，則 $\zeta = \sum_{i=1}^{m} \hat{x}^i$, $\hat{x}^i \in \varphi_i(\hat{p})$ 与由分解而得的$[\hat{x}^1, \hat{x}^2, \cdots, \hat{x}^m, \hat{p}]$是原型的平衡解。为此，只須証明 $\hat{p}>0$ 与在限制条件 $x \geqq 0$, $\hat{p}x \leqq \hat{p}\zeta^i$ 下 $\hat{x}^i$ 使 $u_i(x)$ 为最大。

設有某种財貨 j 的价格是 $\hat{p}_j = 0$，則由 u_i 的严格单調增加性，以及 φ_i 的定义 (11.2)，必須有 $\hat{x}^i_j = a_j$，而这是与 $\hat{x}^i \leqq \sum_{i=1}^{l} \hat{x}^i = \zeta < a$ 相矛盾的，因而 $\hat{p}>0$. 此外，假使有滿足 $w \geqq 0$, $\hat{p}w \leqq \hat{p}\zeta^i$ 并且 $u_i(w) > u_i(\hat{x}^i)$ 的 w 存在，那末，显然必須 $w \notin E$. 其次，由于 $0 \leqq \hat{x}^i < a$，所以綫段$[\hat{x}^i, w]$与 E 的公共部分必須含有 $\hat{x}^i$ 以外的点 y. 一方面，由于 $u_i(x)$ 是連續的，$u_i(w) > u_i(\hat{x}^i)$，所以适当地选取 $z \in (0, w)$，能够使

$$u_i(z) \geqq u_i(\hat{x}^i),$$

其次，由于二个綫段$[z, \hat{x}^i]$, $(y, 0]$必定相交，設其公共点为 b，則根据决定 z 的方法，$b \in [z, \hat{x}^i]$以及 u_i 的拟凹性，有

$$u_i(b) \geqq u_i(\hat{x}^i).$$

此外，由于 $b \in (y, 0]$，故 $y \geqslant b$. 因而，利用 u_i 的严格单調遞增性，得到

$$u_i(y) > u_i(b) \geqq u_i(\hat{x}^i).$$

然而，因为 $y \in E$, $\hat{p}y \leqq \hat{p}\zeta^i$，而这是与 $\hat{x}^i \in \varphi_i(\hat{p})$ 相矛盾的。如此，証明了 $u_i(\hat{x}^i)$ 是在 $\hat{p}x \leqq \hat{p}\zeta^i$ 下不只是 E，而且是在 R^n_+ 的全部区

域上的最大值。

A–D 模型的情况 現在来証明，上述事实在这种情况下也成立。就是説，对于 $\hat{x}^i\in\varphi_i(\hat{p})$，$\hat{y}^k\in\psi_k(\hat{p})$，若平衡条件(iii)

$$\zeta+\sum_{k=1}^{m}\hat{y}^k\geqq\sum_{i=1}^{l}\hat{x}^i$$

成立，则可以証明

$$[\hat{x}^1,\ \hat{x}^2,\ \cdots,\ \hat{x}^l,\ \hat{y}^1,\ \hat{y}^2,\ \cdots,\ \hat{y}^m,\ \hat{p}]$$

是原型的平衡解。証明的要点本质上与上例是相同的。以下，把平衡条件就不同条件分别加以証明。

(i)的証明 假如有使 $\hat{p}y>\hat{p}\hat{y}^k$ 的点 $y\in Y_k$，则对于任意的 $z\in[y,\ \hat{y}^k)$，有 $\hat{p}z>\hat{p}\hat{y}^k$。但是，由于 $\hat{y}^k\in\tilde{Y}_k$，所以 $\hat{y}^k$ 是 E 的内点。因而，凡是 $[y,\ \hat{y}^k)$ 的点 z 而且充分接近 $\hat{y}^k$ 的都处于 $Y_k\cap E$。但这是与 $\hat{y}^k$ 是利潤最大点这一事实相矛盾的。因而，$\hat{y}^k$ 是在全部变域 Y_k 上的 $\hat{p}y$ 的最大点❶。

(ii)的証明 假定存在着能使 $u_i(w)>u_i(\hat{x}^i)$，$\hat{p}w\leqq\hat{p}\zeta^i+\sum\alpha_{ik}\pi_k(\hat{p})$ 的点 $w\in X_i$，则由假定 III. c，对于綫段 $[w,\ \hat{x}^i)$ 上的点 y，有

$$u_i(y)>u_i(\hat{x}^i).$$

但是，因为 $\hat{x}^i\in\tilde{X}_i$，所以 $\hat{x}^i$ 是 E 的内点。因而，如果把前述的 y 取成充分地接近 $\hat{x}^i$，则 y 含于 $X_i\cap E$，同时，由于

$$\hat{p}y\leqq\hat{p}\zeta^i+\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik}\pi_k(\hat{p})$$

的成立也是显然的，所以这是与 $\hat{x}^i$ 为效用最大点相矛盾。因而，$\hat{x}^i$ 是預算制約下，在全变域 X_i 的效用最大点。

(iii)的后半部分的証明 对于 $\hat{x}^i$，等式

$$\hat{p}\hat{x}^i=\hat{p}\zeta^i+\sum\alpha_{ik}\pi_k(\hat{p})$$

---

❶ 因此，須注意 $\hat{y}=\sum_{k=1}^{m}\hat{y}^k$ 是在 $Y=\sum_{k=1}^{m}Y_k$ 上成为 $\hat{p}y$ 的最大点。

成立。假若，設严格不等号作为成立了，則若取根据非飽和假定而存在着的使 $u_i(x)>u_i(\hat{x}^i)$ 成立的 $x\in X_i$ 时，則对于任意的 $y\in[x,\hat{x}^i)$，有 $u_i(y)>u_i(\hat{x}^i)$，同时，若 y 与 $\hat{x}^i$ 充分接近，則也滿足預算制約式，但这是与 $\hat{x}^i$ 为效用最大点相矛盾的。因而，預算制約式中等号应当成立，将这些对 i 求和，則有

$$\hat{p}\sum_{i=1}^{l}\hat{x}^i=\hat{p}\zeta+\hat{p}\sum_{k=1}^{m}\hat{y}^k. \tag{12.1}$$

因而，根据(iii)的前半部分与(12.1)，(iii)的后半部分是容易得到的。

以上就两个例子討論了一般平衡模型与对应于它的供求函数的构成，証明了这些是能滿足 Walras 法則的，又論述了模型的平衡与供求函数的关系。其結果是，問題被变换为供求函数的平衡問題了。因而，为了了解平衡解的实际存在与否，必須詳細地了解价格与这些函数值（集合）及其对应状况，特別是从拓扑的观点来加以研究。以下的 §13～§15 就是为了这样而作的准备。

§13 Brouwer 不动点定理

作为凸集的主要性质，以及为了証明平衡存在定理的准备，必須叙述并証明不动点存在定理(即 Brouwer 定理)，然后将这个定理推广到多値映象的情况(角谷定理)。

Brouwer 不动点定理 設 X 为 R^n 的紧的凸集，$f(x)$ 为把 X 的点 x 对应到 X 的点 $f(x)$ 的連續映象，則存在着不动点

$$\hat{x}=f(\hat{x}).$$

由已經叙述过的 §4, §6, X 是与 m (对适当的 $m(0\leq m\leq n)$) 維单純形 S 同胚的。設 S 与 X 之間的一一且双方連續的映象为 g，則連續映象

$$h(p)=g^{-1}[f\{g(p)\}]$$

是把 S 的点 p 映照为 S 的点 $h(p)$ 的映象。如果 $h(p)$ 有不动点 $\hat{p}$，則 $\hat{x}=g(\hat{p})$ 是 f 的不动点。因此，只要就 X 为单純形的情况

来証明就行了。

为了証明定理，首先就单純形作一些考察，虽然以下所述的补充命題对任意的单純形分划都成立，但这里只限于討論重心分划的情形。

Sperner 补充命題　設对于单純形 $S=\overline{x^0x^1\cdots x^n}$ 已施行了几次重心分划。利用服从下述規則的方法，这个单純形分划的各个頂点 y，可以对应于 S 的頂点 $x^0, x^1, \cdots, x^n$ 中的一个 $\sigma(y)$。就是說，$\sigma(y)$ 对应于包含 y 的最小維数的（未作分划的，原来 S 的）边单純形的頂点。这时，对于由 S 的分划而得的 n 維小单純形 $S'=\overline{y^0y^1\cdots y^n}$（一般地，$\sigma(y^0)$，$\sigma(y^1)$，$\cdots$，$\sigma(y^n)$ 里面有着一致的东西，但特别也有 $\sigma(y^i)\neq\sigma(y^j)$ $(i\neq j)$ 的那种 S'）来說，至少存在着一个这样的 S'，更正确些說，存在着奇数个。

証明　用归納法来証。当 $n=0$ 时是显然的。在 $n=1$ 的情况，$S=\overline{x_0x_1}$ 是綫段 $[x^0, x^1]$，分划是在这个綫段上設置的分点。根据頂点对应 $y\to\sigma(y)$ 的規則，有 $\sigma(x^0)=x^0$，$\sigma(x^1)=x^1$。这里，含有 x^0，x^1 的 S 的最低維数的边单純形分别是 x^0，x^1 本身。因为包含着由分划而設立的新的其他頂点 y 的 S 的最低維数的边单純形是 S 自身，所以 $\sigma(y)$ 是 x^0 或 x^1。如图 13.1，从左向右移动时，去研究 $\sigma(y)$，只要 $\sigma(y)=x^0$ 的操作継續进行，既然 $f(x^1)=x^1$，就会在一个地方遇到初次是 $\sigma(y)=x^1$ 的頂点。設这个頂点为 b，与其很靠近的左方的頂点为 a，则小单純形 $\overline{ab}$ 就是要求的。結果，据上所述，这种小单純形的个数，当自左向右移动时，$\sigma(y)$ 的值从 x^0 到 x^1，或从 x^1 到 x^0 的变化次数是相等的。这很明显是奇数。

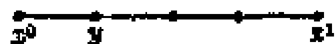


图 13.1

假定維数低于 n 的情况下定理結論是正确的，現在来証明維数为 n 的情况。由 $S=\overline{x^0x^1\cdots x^n}$ 的分划而产生的 n 維小单純形 $S'=\overline{y^0y^1\cdots y^n}$ 的頂点，由对应 $y\to\sigma(y)$，对应于 x^0，x^1，$\cdots$，x^n 的全

部时，則 S' 叫做正則小单純形，由同样的分划所产生的 $(n-1)$ 維小单純形 $T'=\overline{z^0z^1\cdots z^{n-1}}$ 的頂点对应着頂点 $x^0, x^1, \cdots, x^{n-1}$ 的全部时，則 T' 叫做正則的小边单純形。这里，設 λ 为正則小单純形的个数，μ 为在 S 的境界上所有的正則的小边单純形的个数，$\mu(S')$ 为小单純形 S' 的正則的小边单純形的个数，則可以証明 λ 是奇数❶。

首先来看看 $\mu(S')$ 的值。若 S' 是正則的，則 S' 的只有一个边单純形的頂点映成 $x^0, x^1, \cdots, x^{n-1}$. 这是因为其他的边单純形的頂点必包含着对应于 x^n 的頂点之故。因而，在这种情况下，$\mu(S')=1$. 若 S' 不是正則的，則在 $n+1$ 个頂点 $x^0, x^1, \cdots, x^n$ 之中，必定有着不是 S' 的頂点的象。而假使 $x^0, x^1, \cdots, x^{n-1}$ 中有不是 S' 的頂点的象，則显然 $\mu(S')=0$. 在其他的情况下，則只要把 S' 的頂点安上适当的号碼，則因 $S'=\overline{y^0y^1\cdots y^n}$, $\sigma(y^i)=x^i$ $(i=0, 1, \cdots, n-1)$, $\sigma(y^n)=x^j$（对于某种 $0\leqq j\leqq n-1$ 的 j），故正則的小边单純形是 $\overline{y^0y^1\cdots y^{n-1}}$ 与把这个单純形的頂点 y^j 易以 y^n 后的一个小边单純形合計二个。故而，这种情况下，$\mu(S')=2$. 因此，

$$\lambda\equiv\sum\mu(S') \quad (\mathrm{mod}\ 2)\ (\text{关于一切小单純形 } S' \text{ 的和}). \tag{13.1}$$

(13.1) 从一方面看来，虽然是正則的小边单純形的个数之和，却是有着若干重复的。一个正則的小边单純形，如果它是附着于 S 的境界上的，則正好是一个小单純形的边单純形，如果它不是完全在境界上的，則恰巧是两个小单純形的边单純形。因而

$$\mu\equiv\sum\mu(S') \quad (\mathrm{mod}\ 2), \tag{13.2}$$

于是 $\lambda\equiv\mu \pmod 2$ 成立。

其次，設 T' 是在 S 的境界上的正則小边单純形，則 S 的边单純形 T 必须是 $\overline{x^0x^1\cdots x^{n-1}}$. 这是根据頂点对应規則 $y\to\sigma(y)$ 显而易見的。就是說，若其他边单純形有 T'，則 $x^0, x^1, \cdots, x^{n-1}$ 之中

❶ 关于証明的格式，依照 Whyburn [21] 第 243 頁。

至少有一个不是T'的頂点的象。其次，在这里，若把对应 $y\to\sigma(y)$ 限定在$(n-1)$維单純形 $T=\overline{x^0x^1\cdots x^{n-1}}$ 上来考察，当然滿足前述規則，故由归納法的假設，μ 是奇数。因此，λ 也是奇数。

不动点定理的証明 只要把 S 在基本单純形

$$S_{n+1}=\left\{p\,|\,p\geqq 0,\ \sum_{i=0}^{n}p_i=1\right\}$$

的情况下加以証明就好了。設 f 是将 S_{n+1} 的点 p 映照成 S_{n+1} 的点

$$f(p)=(f_0(p),f_1(p),f_2(p),\cdots,f_n(p))\geqq 0,\quad \sum_{i=0}^{n}f_i(p)=1$$

的連續映象。作如下的$(n+1)$个閉集：

$$F_i=\{p\,|\,p\in S_{n+1},\ p_i\geqq f_i(p)\}. \tag{13.3}$$

这是因为形成閉集的 f_i 是連續函数的緣故。这个閉集合族 $\{F_i\}$ 具有以下的性质。首先，S_{n+1} 的$(n+1)$个頂点是

$$e^i=(\overbrace{0,\ \cdots,\ 0,\ 1}^{i+1},\ 0,\ \cdots,\ 0).$$

設 S_{n+1} 的任意的边单純形为 $T=\overline{e^{i_0}e^{i_1}\cdots e^{i_k}}$，則

$$T\subset F_{i_0}\cup F_{i_1}\cup\cdots\cup F_{i_k}.$$

这里，关于 T 的点 p，因为 $p_{i_0}+p_{i_1}+\cdots+p_{i_k}=1$，假如，設 $p\notin F_{i_t}$ $(t=0,1,\cdots,k)$，則关于一切 t，有 $p_{i_t}<f_{i_t}(p)$，将其合計起来，可得 $1<\sum_{t=0}^{k}f_{i_t}(p)\leqq\sum_{i=0}^{n}f_i(p)$，这是矛盾的。因此，

$$T\subset\bigcup_{t=0}^{k}F_{i_t}$$

成立。特别，S_{n+1} 的各頂点 $e^i\in F_i$.

其次，将 S_{n+1} 作任意次的重心分划，用小单純形的网来遮盖。設包含小单純形的頂点 y 的最低次維数的边单純形为

$$T=\overline{e^{i_0}e^{i_1}\cdots e^{i_k}},$$

則由前述的結果，由于 $F_{i_0}, F_{i_1}, \cdots, F_{i_k}$ 之中必定有包含 y 的，选取一个这样的 F_{i_r}，作 $\sigma(y)=e^{i_r}$. 这个頂点对应 $y\to\sigma(y)$，从其作出的方法，显然是能滿足 Sperner 补充命題的条件的，所以至少存在一个正則的小单純形 S'. 若将 S' 的頂点放上适当的号碼，則易知 $S'=\overline{y^0y^1\cdots y^n}$, $y^i\in F_i\ (i=0, 1, \cdots, n)$. 現在，設重心分划的次数为 ν，則由 §6 的結果，有

$$\max_{0\leqq i, j\leqq n} \rho(y^i, y^j)=d(S')$$

$$\leqq\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\nu}\cdot d(S_{n+1})\to 0 \quad (\nu\to\infty). \quad (13.4)$$

这里，关于每一組各个 $\nu\ (\nu=1, 2, 3, \cdots)$，若选擇正則的小单純形 $\overline{y^{0\nu}y^{1\nu}\cdots y^{n\nu}}$, $y^{i\nu}\in F_i\ (i=0, 1, \cdots, n)$，則因 S_{n+1} 是紧的，所以 $n+1$ 个点列 $\{y^{i\nu}\}\ (i=0, 1, \cdots, n)$ 的适当的部分序列 $\{y^{i\nu'}\}$ (ν' 为各点列上公共部分的自然数列) 分别收斂于 p^i. 按这样做时，由于 F_i 为閉集，当然，$p^i\in F_i$，由 (13.4)，实际上，p^i 的全部必須是同一个点 $\hat{p}$. 因而 $\hat{p}$ 是含于一切 $F_i\ (i=0, 1, \cdots, n)$ 的点。因此，有

$$\hat{p}_i\geqq f_i(\hat{p}) \quad (i=0, 1, \cdots, n).$$

由此式以及

$$\sum_{i=0}^{n}\hat{p}_i=\sum_{i=0}^{n}f_i(\hat{p})=1,$$

所以 $\hat{p}_i=f_i(\hat{p})$ 关于一切 i 成立。这就是說，使 $\hat{p}=f(\hat{p})$ 成立的 $\hat{p}$ 是不动点。以上，結束了不动点定理的証明。上述証明是作为 Brouwer 定理的証明的最初等方法，它就是著名的 **Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz 的証明**。

Brouwer 不动点定理是非常重要与有用的定理，它或者从它进一步推广而得的形式在許多問題上应用甚广。众所周知的重要例子是在微分方程存在定理上的应用[1]。此外，不动点定理也是在将博奕論基本定理一般化时不

[1] 关于这个問題，可参照疋原，佐藤，古屋：常微分方程 I（本讲座）第3章（即本丛书中張庆芳等譯《常微分方程》——譯者注）。

可缺少的武器❶。

§14 角谷不动点定理

Brouwer 定理可以推广到多值映象(即点对集合的映象)，給出在应用上非常便利的形式。这就是本节要讲的角谷定理❷，其原始形式是由 von Neumann 发現的❸。

閉映象 首先，从关于点对集合映象的連續概念的說明开始。設 X, Y (同一个或相异的)为 Euclid 空間內的二个集合，且 Y 是紧的。当然，$X, Y \neq \phi$. 并假設有把 X 的点 x 对应到 Y 的非空子集 $f(x)$ 的点对集合映象 $f: X \to Y$. 現在把 X 与 Y 的直积空間 $X \times Y$ 中的子集

$$G_f = \{(x, y) \mid y \in f(x),\ x \in X,\ y \in Y\}$$

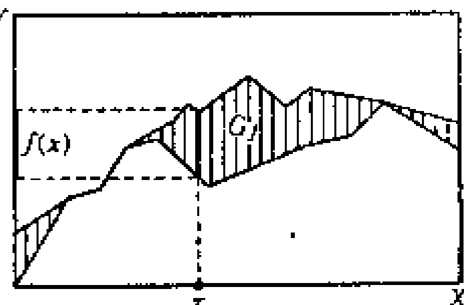


图 14.1

叫做映象 f 的**图象**。这是通常单值映象的图象概念的自然推广。若 G_f 成为 $X \times Y$ 的閉集，換言之，如果 $\lim_{\nu\to\infty} x^\nu = x$, $\lim_{\nu\to\infty} y^\nu = y$, $y^\nu \in f(x^\nu)$，而必有 $y \in f(x)$，則把映象 $f: X \to Y$ 叫做**閉映象**。

映象 f 是閉的这件事，是与集合 X, Y 有关系的相对的性質。因而，在正确叙述的情况下，虽然要象上面那样地說"点对集合映象 $f(x): X \to Y$ 是閉的"，但如果定义域等很明显时，这些話也可以省略。

若 f 是閉的，則各点的象 $f(x)$ 是紧的。在該处，由于 Y 是紧的，所以只要証明 $f(x)$ 是置于 Y 上的閉集就好了❹。設 $y^\nu \in f(x)$，

---

❶ 例如，見 H. Nikaidô: On von Neumann's minimax theorem, Pacific J. Math., 4, No. 1; 及 H. Nikaidô and K. Isoda: Note on noncooperative convex games, Pacific J. Math., 5, Supplement 1.

❷ 見角谷[5]。

❸ 見 von Neumann [10].

❹ 見入江[23]第 93 頁定理 6.

$\lim_{\nu\to\infty} y^\nu = y \in Y$。若取 X 的点列 $x^\nu = x(\nu=1, 2, \cdots)$，则当然有

$$\lim_{\nu\to\infty} x^\nu = x.$$

因而，由閉映象的定义，有 $y\in f(x)$，$f(x)$ 是閉集。

对于 $a\in X$ 的象 $f(a)$ 的任意 ε 邻域 $U(f(a), \varepsilon)$，当定出 a 的适当的 δ 邻域 $U(a, \delta)$，若 $x\in U(a, \delta)$ 时有 $f(x)\subset U(f(a), \varepsilon)$，則称映象 f 为在 $x=a$ 处是**上半連續**的。在上述的假設之下，若 $f: X\to Y$ 是閉映象，則在各点 $a\in X$ 处是上半連續的。为了証明这个，現在，設在上半連續性的定义中所提到的 a 的 δ 邻域不存在，則在 a 的 $\dfrac{1}{\nu}$ 邻域 $U\left(a, \dfrac{1}{\nu}\right)(\nu=1, 2, 3, \cdots)$ 之中，存在着 x^ν，使 $f(x^\nu)\not\subset U(f(a), \varepsilon)$。在这里，可以选定滿足 $y^\nu\in f(x^\nu)$，$y^\nu\notin U(f(a), \varepsilon)$ 的点 $y^\nu\in Y$。由于 Y 是紧的，所以存在着点列 $\{y^\nu\}$ 的聚点。設其中之一为 b，則 (a, b) 成为点列 $\{(x^\nu, y^\nu)\}$ 的聚点。但是，由于 $(x^\nu, y^\nu)\in G_f(\nu=1, 2, \cdots)$，$G_f$ 是在 $X\times Y$ 上閉的，所以 $(a, b)\in G_f$，就是說，必須 $b\in f(a)$。可是，由于 $y^\nu\notin U(f(a), \varepsilon)$，所以其聚点 $b\notin U(f(a), \varepsilon)$ [1]，就是說，$b\notin f(a)$，而这是矛盾的。

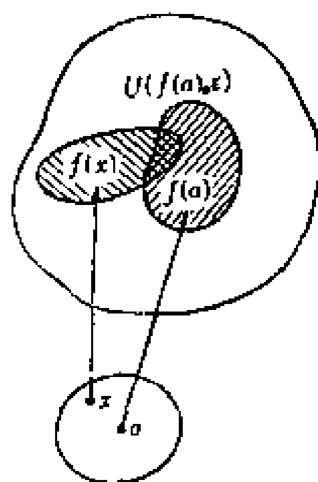


图　14.2

角谷不动点定理　設 X 为 R^n 的紧的凸集，$f: X\to X$ 是把 X 的点 x 对应到 X 的非空的凸子集 $f(x)$ 的閉映象，則存在着不动点

$$\hat{x}\in f(\hat{x}).$$

証明[2]　由于 X 是紧的，故对于任意的 $\delta>0$，存在着 δ 网。所謂 δ 网，是說：存在着 X 的有限个点 $a^i(i=1, 2, \cdots, s)$，使在任意点 $x\in X$ 的 δ 邻域，至少存在着一个 a^i。这是与用有限个 δ 邻域 $U(a^i, \delta)$ $(i=1, 2, \cdots, s)$ 来复蓋 X 的全部这件事相当的。取 X 的点 a 的 δ 邻域 $U(a, \delta)$，如

[1] 因为 $U(f(a), \varepsilon)$ 是开集，因而 $\{y|y\in Y, y\notin U(f(a), \varepsilon)\}$ 是 Y 的閉集。

[2] 由二階堂[12]。

果关于各个点 a 取这种邻域，则显然 $X\subset\bigcup_{a\in X}U(a,\delta)$，由于各 $U(a,\delta)$ 是开集，X 是紧的，故由 Heine-Borel 复盖定理❶，可以用有限个 $U(a,\delta)$ 来复盖 X。这就是 δ 网存在的論据。

对于 $\delta>0$，設把 $\{a^{\delta i}|i=1,2,\cdots,s_\delta\}$ 作 δ 网，个数 s_δ 是与 δ 有关的。若作 s_δ 个連續函数

$$\theta_i^\delta(x)=\max(0,\delta-\rho(x,a^{\delta i}))\quad(i=1,2,\cdots,s_\delta),\quad(14.1)$$

则由 $\theta_i^\delta(x)\geqq 0$ 以及 δ 网的定义，关于某个 i，有 $\rho(x,a^{\delta i})<\delta$，即，因为 $\theta_i^\delta(x)>0$，所以到处有 $\sum_{i=1}^{s_\delta}\theta_i^\delta(x)>0$。故而，可得 s_δ 个連續函数

$$w_i^\delta(x)=\theta_i^\delta(x)\Big/\sum_{j=1}^{s_\delta}\theta_j^\delta(x)\quad(i=1,2,\cdots,s_\delta).\quad(14.2)$$

因为 $w_i^\delta(x)\geqq 0$，$\sum_{i=1}^{s_\delta}w_i^\delta(x)=1$，利用这个函数，能够作出把 X 的点 x 映照成为 X 的点 $g_\delta(x)$ 的单值与連續的映象

$$g_\delta(x)=\sum_{i=1}^{s_\delta}w_i^\delta(x)b^{\delta i}.\quad(14.3)$$

这里 $b^{\delta i}$ 是就含于 $f(a^{\delta i})$ 的点任意地选定的。由于 $g_\delta(x)$ 是 $b^{\delta i}$ 的系数 $w_i^\delta(x)$ 的凸組合，故易知 $g_\delta(x)\in X$。(14.3) 称为 **Kuratowski 映象**。

由于 $g_\delta(x)$ 是把 X 的点連續地映照为 X 的点，故由 Brouwer 定理，存在着使

$$x^\delta=g_\delta(x^\delta)\quad(14.4)$$

成立的不动点 x^δ。

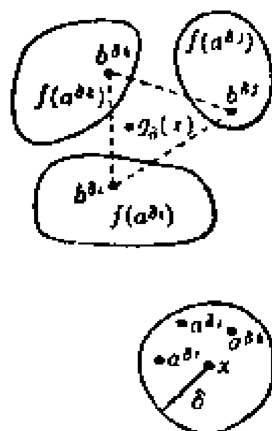


图 14.3

其次，由于 X 是紧的，故对于适当的正数列 $\{\delta_\nu\}$，$\lim_{\nu\to\infty}\delta_\nu=0$，滿足 (14.4) 的点 x^{δ_ν} 收斂于 X 的点 $\hat{x}$。以下，証明这个 $\hat{x}$ 是 f 的不动点。

由于 f 是閉映象，故在 $\hat{x}$ 处上半連續，因而，对于 $f(\hat{x})$ 的

❶ 参考入江[23]第 97 頁定理 11。

任意 ε 邻域 $U(f(\hat{x}), \varepsilon)$，存在着 $\hat{x}$ 的 δ 邻域 $U(\hat{x}, \delta)$，使得当 $x \in U(\hat{x}, \delta)$ 时，

$$f(x) \subset U(f(\hat{x}), \varepsilon).$$

其次，将 ν 选得充分大，并設 $\delta_\nu < \frac{\delta}{2}$ 与 $\rho(\hat{x}, x^{\delta_\nu}) < \frac{\delta}{2}$ 都成立。这时，由 x^{δ_ν} 的选取方法，有

$$x^{\delta_\nu} = g_{\delta_\nu}(x^{\delta_\nu}) = \sum_{i=1}^{s_{\delta_\nu}} w_i^{\delta_\nu}(x^{\delta_\nu}) b^{\delta i}. \tag{14.5}$$

若 $w_i^{\delta_\nu}(x^{\delta_\nu}) > 0$，則 $\rho(x^{\delta_\nu}, a^{\delta_\nu i}) < \delta_\nu < \frac{\delta}{2}$，因而，

$$\rho(\hat{x}, a^{\delta_\nu i}) \leqq \rho(\hat{x}, x^{\delta_\nu}) + \rho(x^{\delta_\nu}, a^{\delta_\nu i}) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

即，如果 $w_i^{\delta_\nu}(x^{\delta_\nu}) > 0$，則因为 $a^{\delta_\nu i} \in U(\hat{x}, \delta)$，故对于这个号碼 i，有

$$b^{\delta_\nu i} \in f(a^{\delta_\nu i}) \subset U(f(\hat{x}), \varepsilon).$$

因此，由于 x^{δ_ν} 是凸集 $U(f(\hat{x}), \varepsilon)$ 中的点的凸組合，所以

$$x^{\delta_\nu} \in U(f(\hat{x}), \varepsilon).$$

这里，如果使 $\nu \to \infty$，則

$$\hat{x} = \lim_{\nu \to \infty} x^{\delta_\nu} \in \overline{U}(f(\hat{x}), \varepsilon).$$

由于这个結果对于任意的 $\varepsilon > 0$ 成立，所以

$$\hat{x} \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{U}(f(\hat{x}), \varepsilon) = \overline{f(\hat{x})} = f(\hat{x}).$$

这里 $\overline{f(\hat{x})} = f(\hat{x})$ 所以成立，是因为 $f(\hat{x})$ 为閉集之故。

§ 15 关于映象的运算

（i）**映象的結合** 若 $x \to f(x)$: $X \to Y$ 是閉的点对集合映象，且 $y \to g(y)$: $Y \to Z$ 是单值且連續的映象，則点对集合映象 $x \to g(f(x))$: $X \to g(Y)$ 也是閉的。实际上，設 $x, x^\nu \in X$，$\lim\limits_{\nu \to \infty} x^\nu = x$，$z, z^\nu \in g(Y)$，$\lim\limits_{\nu \to \infty} z^\nu = z$，$z^\nu \in g(f(x^\nu))$，則由于 Y 是紧的，所以可設 $z^\nu = g(y^\nu)$，$y^\nu \in f(x^\nu)$，$\lim\limits_{\nu \to \infty} y^\nu = y$。这样做时，由于 f 为閉

的，$y\in f(x)$ 成立。并因 g 是連續的，所以

$$z=\lim_{\nu\to\infty} z^{\nu}=\lim_{\nu\to\infty} g(y^{\nu})=g(y).$$

因而，得到 $z\in g(f(x))$，証明完毕。

(ii) **映象的直积** 設由 s 个閉的点对集合映象 $x\to f^{i}(x)$: $X\to Y_{i}$ (Y_{i} 是紧的) ($i=1, 2, \cdots, s$) 来作直积映象

$$x\to f(x): X\to Y=Y_1\times Y_2\times\cdots\times Y_s,$$
$$f(x)=f^1(x)\times f^2(x)\times\cdots\times f^s(x),$$

則它仍然是閉的。实际上，設 $y, y^{\nu}\in Y$, $\lim_{\nu\to\infty} y^{\nu}=y$, $x, x^{\nu}\in X$, $\lim_{\nu\to\infty} x^{\nu}=x$, $y^{\nu}\in f(x^{\nu})$，則由于 $y=(y^1, y^2, \cdots, y^s)$, $y^{\nu}=(y^{1\nu}, y^{2\nu}, \cdots, y^{s\nu})$, $y^{i}, y^{i\nu}\in Y_{i}$, $\lim_{\nu\to\infty} y^{i\nu}=y^{i}$, $y^{i\nu}\in f^{i}(x^{\nu})$，且因各个 f^{i} 是閉的，所以 $y^{i}\in f^{i}(x)$。因此，$y\in f(x)$。

(iii) **映象的数乘积** 設 $x\to f(x)$: $X\to Y$ 是閉的点对集合映象，則当 a 为实数时，映象 $x\to af(x)$: $X\to aY$ 也是閉的。这是由于考虑到 $g(y)=ay$: $Y\to aY$ 为連續函数，所以可适用(i)的情况。

(iv) **映象的矢量和** 設把 $x\to f^{i}(x)$: $X\to Y_{i}$ (Y_{i} 是紧的) 作为是 s 个閉的点对集合映象，則它們的矢量和

$$x\to f(x)=\sum_{i=1}^{s} f^{i}(x): X\to Y=\sum_{i=1}^{s} Y_{i}$$

也是閉的。如果作这些映象的直积映象

$$x\to f^1(x)\times f^2(x)\times\cdots\times f^s(x): X\to Y_1\times Y_2\times\cdots\times Y_s,$$

則由(ii)可知它是閉的。同时，

$$g(y^1, y^2, \cdots, y^s)=\sum_{i=1}^{s} y^{i}: Y_1\times Y_2\times\cdots\times Y_s\to\sum_{i=1}^{s} Y_{i}$$

是单值連續的。由于矢量和 f 是

$$f(x)=g(f^1(x), f^2(x), \cdots, f^s(x)),$$

故最后，由(i)可知，f 是閉的。

(v) **映象的扩張**

[1] 若在二个点对集合映象 $x\to F(x): X\to Y$, $x\to g(x): \tilde{X}\to Y$ (Y 是紧的) 中, $X\subset\tilde{X}$, 对于 $x\in X$, 使 $f(x)=g(x)$ 成立, 则称 g 为 f 的**扩張**。

以往曾把点对集合映象 $f: X\to Y$ 是閉的这件事,通过图象 G_f 是閉集来定义。但是, 反过来, 給定了直积空間 $X\times Y$ 的一个閉集 G,对于任意的 $x\in X$, 若使得 $(x, y)\in G$ 的 $y\in Y$ 必定存在,則可定义从 X 到 Y 的点对集合映象

$$f(x)=\{y\,|\,y\in Y,\ (x, y)\in G\}\neq\phi,$$

这时, 由于 f 的图象恰好成为 G, 所以 f 是閉映象。这个操作是得到閉映象的便利方法之一,利用这个方法,可以实施映象的**閉扩張**。

实际上, $f: X\to Y$ 是閉的点对集合映象,进一步,若設 X 是在 $\tilde{X}$ 上**稠密**的,則可以把 f 扩張为从 $\tilde{X}$ 到 Y 的閉映象 g ($g(x)\neq\phi$) (Y 照例設为紧的)。

証明 虽然 f 的图象 G_f 是 $X\times Y$ 上的閉集,但是在 $\tilde{X}\times Y$ 上却不一定是閉集。这里,若取它的閉包 $\bar{G}_f$, 則显然 $\bar{G}_f$ 是 $X\times Y$ 的閉集。那末,由于 X 是在 $\tilde{X}$ 上稠密的,故对于任意的 $x\in\tilde{X}$,可以选取使 $x^\nu\in X$, 与 $\lim\limits_{\nu\to\infty} x^\nu=x$ 成立的点列 $\{x^\nu\}$. 如果从 $f(x^\nu)$ 选擇一点 y^ν, 則由于 Y 是紧的,故由例子可以假定 $y^\nu\to y\in Y$ ($\nu\to\infty$). 因而, $(x^\nu, y^\nu)\in G_f$, 并且因为 $(x^\nu, y^\nu)\to(x, y)\in\tilde{X}\times Y$, 所以 $(x, y)\in\bar{G}_f$. 故而,按照前述方法,可以来定义閉映象

$$g(x)=\{y\,|\,y\in Y,\ (x, y)\in\bar{G}_f\}.$$

进一步, 若 $x\in X$, $y\in f(x)$, 則因为 $(x, y)\in G_f\subset\bar{G}_f$, 所以, 显然 $f(x)\subset g(x)$, 不仅如此, $g(x)\subset f(x)$ 也是成立的。实际上, 如果取 $y\in g(x)$, 則 $(x, y)\in\bar{G}_f$. 因而, 存在着 G_f 的点列 (x^ν, y^ν), $\lim\limits_{\nu\to\infty}(x^\nu, y^\nu)=(x, y)$ 理当成立, 因而 $(x, y)\in X\times Y$, 并且 G_f 在 $X\times Y$ 上是閉的, 所以必定有 $(x, y)\in G_f$. 故而, $y\in f(x)$, 即

$g(x)\subset f(x)$。据上所述，对于 $x\in X$，必有 $f(x)=g(x)$。

［2］設 $f: X\to Y$ 为闭映象，这里，設 Y 是 R^n 的紧的凸集。这时，使各个 $x\in X$ 对应于 $f(x)$ 的凸包 $C(f(x))$ 的映象也是闭的。

証明 由§5，§6的結果，$C(f(x))$ 的点至多是 $n+1$ 个 $f(x)$ 的点的凸組合。这里，設 $\lim\limits_{\nu\to\infty} x^\nu=x$，$\lim\limits_{\nu\to\infty} z^\nu=z$，$z^\nu\in C(f(x^\nu))$，則对于某个 $y^{s\nu}\in f(x^\nu)$，

$$z^\nu=\sum_{s=1}^{n+1}\lambda_s^\nu y^{s\nu},\quad \lambda_s^\nu\geqq 0,\quad \sum_{s=1}^{n+1}\lambda_s^\nu=1. \tag{15.1}$$

于是，

$$y^{s\nu}\in Y,\ (\lambda_1^\nu, \lambda_2^\nu, \cdots, \lambda_{n+1}^\nu)\in S_{n+1},$$

由于 Y，S_{n+1} 同时是紧的，照例可以假定

$$\lim_{\nu\to\infty}(\lambda_1^\nu, \lambda_2^\nu, \cdots, \lambda_{n+1}^\nu)=(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n+1})\in S_{n+1},$$

$$\lim_{\nu\to\infty} y^{s\nu}=y^s\in Y\quad (s=1, 2, \cdots, n+1).$$

这样做时，由于 f 是闭的，$y^{s\nu}\in f(x^\nu)$ 成立，所以 $y^s\in f(x)$。考虑到这一点，在(15.1)中使 $\nu\to\infty$，則由于

$$z=\sum_{s=1}^{n+1}\lambda_s y^s,\quad \lambda_s\geqq 0,\quad \sum_{s=1}^{n+1}\lambda_s=1,$$

所以 $z\in C(f(x))$。在这里，易知 $x\to C(f(x))$ 是闭的。

［3］綜合以上的[1]，[2]，可以得到下列的結果。設 X，$\tilde{X}$，Y（同一的，或各别的）为 Euclid 空間的集合，X 在 $\tilde{X}$ 上稠密，Y 是紧的凸集。又設 $f: X\to Y$ 为使 $f(x)\neq\phi$ 的闭的点对集合映象，$f(x)$ 恒为凸集。在这些假定之下，可以把 f 扩張为由 $\tilde{X}$ 到 Y 的闭映象 h，并且，$h(x)\neq\phi$，且恒为凸集。

实际上，由操作[1]，把 f 扩張为 $\tilde{X}$ 上的闭映象 $x\to g(x)$，并且由操作[2]，作出下列的 $h(x)=C(g(x))$，則 h 成为闭映象，$h(x)\neq\phi$ 恒为凸集。最后，对于 $x\in X$，有 $g(x)=f(x)$，由于 $f(x)$

本來就是凸的，所以 $C(f(x))=f(x)$. 因而，在 X 上，有 $h(x)=f(x)$，这就做成功了所要求的扩張。

§16 Walras 法則与經济平衡

为了对以往讲过的两个一般平衡模型以及进而对与之同系統的模型，統一地来証明平衡解的存在，需要从这些模型中抛弃一些非本质的部分，把一种所謂**抽象模型** (abstract economic equilibrium model) 来定式化，并确立关于这种抽象模型的平衡解存在定理。在这种抽象模型中，仅仅設置着为了达成平衡而起决定性作用的那些重要条件，而在其他点上可以允許作完全自由的解釋。所謂重要条件，就是 Walras 法則的成立与供求函数的連續性这两条。

Gale–Nikaidô 定理❶ 設財貨种类为 n 个，并且給定了价格 $p\in S_n$ 的**超过供給函数** (excess supply function) $\chi(p)$. 所謂超过供給的意思，就是供給与需要的差。設 $\chi(p)$ 满足下列条件:

(i) $p\to\chi(p)$ 是把 S_n 的点 p 对应到集合 Γ 的凸子集 $\chi(p)\neq\phi$ 的閉映象。但 Γ 是設为 R^n 的某个超立方体。

(ii) 广义的 Walras 法則成立。就是說，若 $x\in\chi(p)$，則

$$px\geqq 0.$$

在以上的假定之下，則在某种适当的价格 $\hat{p}\in S_n$ 下，$\chi(\hat{p})$ 的一切分量是非負的財貨組 $\hat{x}$，即包含着正象限 R_+^n 的点。換言之，$\chi(\hat{p})\cap R_+^n\neq\phi$ 成立。

一切財貨的超过供給是非負的，在最一般的意义上，就是經济平衡的状态。

在証明以前，先解釋定理的几何意义。

---

❶ 見 Gale[4]，二階堂[15]. 这里的証明是根据后者的。这个定理可以进一步扩張为一般的形式，关于这一点，可参考 H. Nikaidô: Existence of equilibrium based on the Walras' law, ISER Discussion Paper No. 2 (阪大社研); G. Debreu: Market equilibrium, Proc. Nat. Acad. Sciences (U. S. A.), 42, No. 11.

因为通过原点，方向数是 $p\in S_n$ 的超平面 π_p 的方程为

$$px=0,$$

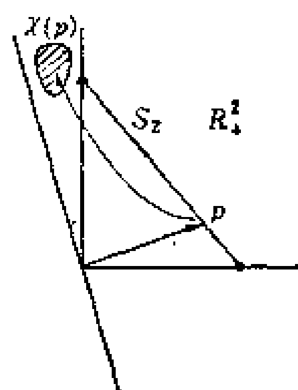


图 16.1

故 Walras 法則卽意味着：集合 $\chi(p)$ 恒在 π_p 的正区域之內。虽然，在图 16.1 中，給出了 $n=2$ 情況下的狀态，但是，相应于 p 的变化，集合 $\chi(p)$ 易知是連續地在 π_p 的正区域內轉动的。假定 R_+^n 与之不相交，則将被限制在 π_p 与 R_+^n 之間的范圍內移动。在 $n=2$ 的情况下，也許可以直观地預料 $\chi(p)$ 不能由与 R_+^n 相交而得。然而，在 $n\geqq 3$ 的一般情况下，应当注意到定理的結論并不是直观地自明的。

証明　首先，导入以下的**价格操作函数**（price manipulating function）。这是对于 R^n 的点 x，能使价額 px 最小的相应价格 $p\in S_n$，正确地說，就是点对集合映象

$$\theta(x)=\{p\,|\min qx=px\ \ (\text{对于一切的 } q\in S_n)\}. \qquad (16.1)$$

由于 S_n 是紧的凸集，qx 是 S_n 上綫性且連續的，所以 $\theta(x)$ 是 S_n 的非空凸子集，并且，$\theta(x)$ 是在 R^n（或 R^n 的任意子集）上的閉映象。事实上，若設 $\lim\limits_{\nu\to\infty}p^\nu=p$，$\lim\limits_{\nu\to\infty}x^\nu=x$，$p^\nu\in\theta(x^\nu)$ $(\nu=1,2,\cdots)$，則对于任意的 $q\in S_n$，由于 $p^\nu x^\nu\leqq qx^\nu$，使 $\nu\to\infty$，得到 $px\leqq qx$. 因而，$p\in\theta(x)$ 成立，于是 $\theta(x)$ 是閉映象。

虽然 $\theta(x)$ 是为了証明上的必要而导入的，但是也可以給以經济学的解釋。現在，可以假設有一种假想的拍卖人（auctioneer）。若設超过供給是 x，則使 $p\in\theta(x)$ 成立的价格是把 x 的价值評价得最低的价格。于是，期待着供給的增加与需要的減少，这个拍卖人可以解釋为叫卖价格 $p\in\theta(x)$.

現在，回到証明的本題。由于 S_n 是基本单純形，当然它是紧的凸集，Γ 是超立方体，所以也是紧的凸集。作直积 $S_n\times\Gamma$，这是 R^{2n} 的凸子集，并且是紧的（§2，§7）。所以对于 $S_n\times\Gamma$ 的点 (p,x)，使对应于 $S_n\times\Gamma$ 的子集

$$f(p,x)=\theta(x)\times\chi(p)\neq\phi,$$

則由于 $\theta(x)$，$\chi(p)$ 是凸的，所以这些直积也是凸的。同时，由于

分量的映象 $x\to\theta(x): \Gamma\to S_n$, $p\to\chi(p): S_n\to\Gamma$ 同为閉的，所以直积映象

$$(p, x)\to f(p, x)=\theta(x)\times\chi(p): S_n\times\Gamma\to S_n\times\Gamma$$

是閉映象。这是由于分量映象 $(p, x)\to\chi(p): S_n\times\Gamma\to\Gamma$ 以及 $(p, x)\to\theta(x): S_n\times\Gamma\to S_n$ 显为閉的，所以适用 § 15(ii)，因而可以直接地推得这个結論。于是，由角谷定理，存在着不动点

$$(\hat{p}, \hat{x})\in f(\hat{p}, \hat{x}).$$

这个关系式无非是

$$\hat{p}\in\theta(\hat{x}), \tag{16.2}$$

$$\hat{x}\in\chi(\hat{p}) \tag{16.3}$$

而已。这样做时，首先从(16.3)，再由 Walras 法則，可知 $\hat{p}\hat{x}\geqq 0$。因而，合并(16.2)，得

$$\min q\hat{x}\ (\text{对于一切 } q\in S_n \text{ 的最小值})=\hat{p}\hat{x}\geqq 0.$$

就是說，对于任意的 $q\in S_n$, $q\hat{x}\geqq 0$ 成立。因而，特别对于 S_n 的頂点 $e^j=(\overbrace{0, \cdots, 0, 1}^{j}, 0, \cdots, 0)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$，有 $\hat{x}_j=e^j\hat{x}\geqq 0$。这里，易知 $\hat{x}\in R^n_+$。于是，証明完毕。

单值映象情况下証明的簡化❶　如果超过供給函数 $\chi(p)$ 是单值函数，即在点对点映象的情况下，則上述的 G-N 定理，可直接用 Brouwer 定理作出証明。在单值函数情况下，閉映象这件事是与連續性等价的。因而，在这种情况下，G-N 定理可以叙述如下：

設超过供給函数 $\chi(p)$ 是从 S_n 到 R^n 的連續映象，并满足广义 Walras 法則 $p\chi(p)\geqq 0$，則对于某个 $\hat{p}$, $\chi(\hat{p})\in R^n_+$ 成立。

証明　設 $\chi(p)$ 的第 j 分量为 $\chi_j(p)$，如果令

$$\theta_j(p)=\max(-\chi_j(p), 0)\quad (j=1, 2, \cdots, n) \tag{16.4}$$

$$\lambda(p)=\frac{1}{1+\sum_{j=1}^{n}\theta_j(p)}, \tag{16.5}$$

$$\theta(p)=(\theta_1(p), \theta_2(p), \cdots, \theta_n(p)), \tag{16.6}$$

❶ 由二階堂：交換均衡と不动点定理，东大火曜研究会，Note No. 7 (1954)。

則映象

$$p \to \lambda(p)(p+\theta(p)) \tag{16.7}$$

是从 S_n 到 S_n 的单値連續映象。故由 Brouwer 定理，存在着不动点 $\hat{p} \in S_n$，使

$$\hat{p} = \lambda(\hat{p})(\hat{p}+\theta(\hat{p})).$$

因而，考慮把(16.5)放在上面，則由簡单的計算可得

$$\sum_{j=1}^{n} \theta_j(\hat{p}) \cdot \hat{p} = \theta(\hat{p}). \tag{16.8}$$

其次，如果設 $\sum_{j=1}^{n} \theta_j(\hat{p}) > 0$，則由于 $\hat{p}_j > 0$ 与 $\theta_j(\hat{p}) > 0$ 等价，因此 $\hat{p}_j > 0$ 与 $\chi_j(\hat{p}) < 0$ 是等价的。故而，可得 $\sum_{j=1}^{n} \hat{p}_j \chi_j(\hat{p}) < 0$，而这是与广义 Walras 法則相矛盾的。因此，由 $\sum_{j=1}^{n} \theta_j(\hat{p}) = 0$ 可得

$$-\chi_j(\hat{p}) \leqq \theta_j(\hat{p}) = 0,$$

就是說 $\chi_j(\hat{p}) \geqq 0$ $(j=1, 2, \cdots, n)$。

讀者也許会想到，上述的証明，在更为一般的情况，即对于 G-N 定理的証明也是可以适用的。就是說，对于点对集合映象 $\chi(p)$，也可定义(16.4)～(16.7)。但是，在这种情况下，虽然(16.7)恰巧是閉映象，但是象 $\lambda(p)(p+\theta(p))$ 为凸集这点却沒有保証，因而不能应用角谷定理。为了克服这个难点，例如应用角谷定理推广的 Eilenberg-Montgomery 定理❶，或 Begle 定理❷，但問題的解决也仍不簡单。因为，虽然象的集合 $\lambda(p)(p+\theta(p))$ 很明显是集合 $\chi(p)$ 的連續象，但是关于这个集合，要想了解其以上所讲的一些拓扑性质是很难办的事。

以下，将就 G-N 定理来叙述二、三件注意事項。

注意 1 設在上述的平衡点 $\hat{x}$ 上，狭义的 Walras 法則可以成立，則由于 $\hat{p}\hat{x} = 0$，如果結合 $\hat{x} \geqq 0$ 一起考慮，則关于使 $\hat{x}_j > 0$ 的分量有 $\hat{p}_j = 0$。即，自由財貨的价格为 0。

注意 2 对于 $\chi(p)$，至少有下列的条件成立：即对于 $x \in \chi(p)$，若 $p_j = 0$，則第 j 种財貨的需要至少要与供給相等，因而，$x_j \leqq 0$。

---

❶ S. Eilenberg and D. Montgomery: Fixed point theorems for multi-valued transformations, Amer. J. Math. Vol. LXVIII, No. 2.

❷ E. G. Begle: A fixed point theorem, Ann. Math., 51, No. 3.

在这样的情况下，若設在平衡上的狭义 Walras 法則成立，則关于一切的財貨有 $\hat{x}_j=0$，即 $\hat{x}=0$. 易知这就是供求完全平衡了。

注意 3 若 $x\in\chi(p)$，$p_j=0$，則在必定使 $x_j<0$ 的那些 $\chi(p)$ 的情况下，平衡价格 $\hat{p}$ 为正，即 $\hat{p}>0$.

以上，如我們以往已举例过的，对于单純交換模型与 Arrow-Debreu 模型来說，为了証明平衡解的存在而进行的准备工作是完全齐备了。

§17 平衡解的存在(单純交換模型的情况)❶

将由在 §11 的(11.2)所构成的 S_n 上定义的个别需要函数 $\varphi_i(p)$ 总計得总需要函数

$$\varphi(p)=\sum_{i=1}^{m}\varphi_i(p),$$

对此，在适当的 $\hat{p}\in S_n$，能使 $\varphi(\hat{p})\ni\zeta$ 成立就行。那样，如果作超过供給函数 $\chi(p)=\zeta-\varphi(p)$，則 $\chi(p)\neq\phi$ 是凸集。以下，根据 φ_i 的作法，有

$$\varphi_i(p)\subset E=\{x\,|\,0\leqq x\leqq a\},$$

因此，

$$\varphi(p)\subset\Delta=\{x\,|\,0\leqq x\leqq ma\},$$

因而，若設 $\zeta-\Delta=\Gamma$，那末由于 Γ 是 R^n 的超立方体，所以

$$\chi(p)\subset\Gamma.$$

同时，如已經說过的那样，Walras 法則也成立。但是，对于这个 $\chi(p)$ 不能直接应用 G-N 定理。这是因为在 S_n 的境界上 $\chi(p)$ 是否为閉映象是件可疑的事情。

例如，当 $n=2$ 时，見图 17.1 所示，个别需要函数不是閉映象。現在，若設消費者 i 的第 2 財貨的持有量是 0，則在 $p_1=0$ 时，这个消費者的收入是 0，

❶ §17，§18 是以 Arrow-Debreu [2]与二階堂[15]，[16]作为根据的。此外，关于映象的閉扩張的有效利用方面，則从 Kuhn [7] 中得到了有益的提示。

而因 $p_2=1$，对第2財貨不可能有需要，虽然如此，在 E 的范圍内，第1財貨的需要可以直到最大限度 a_1．故而，在 $p=(0,1)$ 上，$\varphi_i(p)=(a_1,0)$．但是，当 $p_1>0$ 时，如果 $x\in\varphi_i(p)$，則由預算制約式，有

$$p_1x_1\leqq p_1x_1+p_2x_2=p_1\cdot1+p_2\cdot0=p_1,$$

将 $p_1>0$ 除上式，就得到

$$x_1\leqq1.$$

因此，若設 $\lim_{\nu\to\infty}x^\nu=x$, $\lim_{\nu\to\infty}p^\nu=(0,1)$, $p_1^\nu>0$, $x^\nu\in\varphi_i(p^\nu)$，則

$$x_1=\lim_{\nu\to\infty}x_1^\nu\leqq1<a_1,$$

而有 $x\notin\varphi_i(p)$，$p=(0,1)$．在图17.1中，通过 ζ^i 的直綫族分别对应着这些价格的預算制約綫 $px=p\zeta^i$，其中虚綫表示效用无差别曲綫，在中間上下續断的集合把对应于各个 p 的效用最大点連接起来。这集合元素中的一个，点 $(a_1,0)$ 成为孤立点。

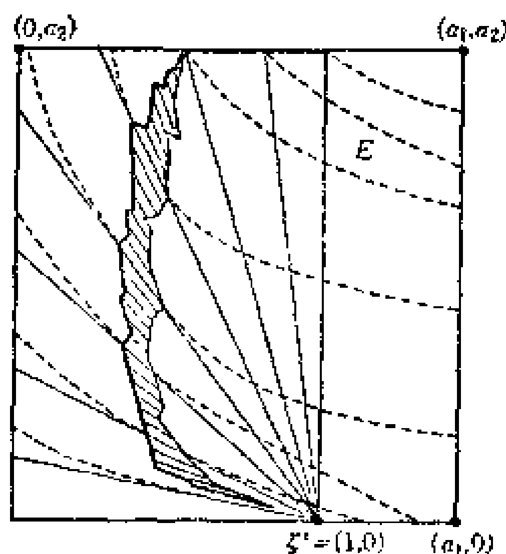


图　17.1

因此，直接构成 $\chi(p)$ 的方法多多少少需要作若干修正。

实际上，用下列手續来构成可以适用于 G–N 定理的 $\chi(p)$．設各个 i 的收入为 $I_i(p)=p\zeta^i$．进一步，把在 S_n 的点 p 上使 $I_i(p)>0$ 的东西的集合記为 S_n^i，由于 $\zeta^i\geqq0$，若 $p>0$，則 $I_i(p)>0$，于是，$p\in S_n^i$．就是說，若設 S_n 的开核为 S_n^0，則 $S_n^0\subset S_n^i\subset S_n$．由于 S_n^0 是在 S_n 上稠密的，所以 S_n^i 也在 S_n 上是稠密的。以下証明作为从 S_n^i 到 E 的点对集合映象的个别需要函数 $\varphi_i(p)$ (11.2) 是閉映象。

設 $\lim_{\nu\to\infty}p^\nu=p$, p, $p^\nu\in S_n^i$, $\lim_{\nu\to\infty}x^\nu=x$, x, $x^\nu\in E$, $x^\nu\in\varphi_i(p^\nu)$，首先在 $p^\nu x^\nu\leqq p^\nu\zeta^i$ 中，使 $\nu\to\infty$，則有

$$px\leqq p\zeta^i.$$

这表示 x 反正是能滿足对应于 p 的預算制約式的。以下証明对于使 $py\leqq p\zeta^i$ 成立的任意的 $y\in E$，必有

$$u_i(x)\geqq u_i(y)$$

成立。考虑到 $I_i(p^\nu)>0$, $I_i(p)>0$, 对于上述的 y, 若設

$$\lambda_\nu=\frac{I_i(p^\nu)}{\max(I_i(p^\nu),\ p^\nu y)}, \tag{17.1}$$

则由定义可知 $0<\lambda_\nu\leqq 1$. 此外,由于 $py\leqq I_i(p)$, 所以

$$\lim_{\nu\to\infty}\max\ (I_i(p^\nu),\ p^\nu y)=\max\ (I_i(p),\ py)=I_i(p),$$

因此

$$\lim_{\nu\to\infty}\lambda_\nu=1. \tag{17.2}$$

利用这个 λ_ν, 如果設 $y^\nu=\lambda_\nu y$, 则由(17.2)可知

$$\lim_{\nu\to\infty}y^\nu=y, \tag{17.3}$$

并且,由簡单的計算可知

$$y^\nu\in E,\ p^\nu y^\nu=\lambda_\nu p^\nu y\leqq I_i(p^\nu).$$

因此,根据 $x^\nu\in\varphi_i(p^\nu)$ 的意义,所以

$$u_i(x^\nu)\geqq u_i(y^\nu).$$

在这里,若使 $\nu\to\infty$, 则由 u_i 的連續性,知

$$u_i(x)\geqq u_i(y).$$

这样,証明了 x 是在預算制約式 $y\in E$, $py\leqq p\zeta^i$ 之下的效用最大点,于是 $x\in\varphi_i(p)$ 成立。

其次,前已叙述象 $\varphi_i(p)$ 是凸集合,所以遵循着§15, [3]的手續,可以作出把 $\varphi_i(p)$ 扩张为閉映象 $\tilde{\varphi}_i(p): S_n\to E$, 并且象 $\tilde{\varphi}_i(p)\neq\phi$ 的凸集。关于各个 i, 都构成这样的 $\tilde{\varphi}_i(p)$, 此时,若設

$$\tilde{\varphi}(p)=\sum_{i=1}^{m}\tilde{\varphi}_i(p), \tag{17.4}$$

$$\chi(p)=\zeta-\tilde{\varphi}(p), \tag{17.5}$$

则这个 $\chi(p)$ 满足了G-N定理的一切条件。但是,超立方体 Γ 是采用了与本节开头同样的东西。以下来研究,为何G-N定理的条件能被满足。

由于各 $\tilde{\varphi}_i(p)$ 的象是凸的,所以 $\chi(p)$ 也是凸的。此外,由于

各个 $\tilde{\varphi}_i(p)$ 是閉映象，所以 $\chi(p)$ 也是閉映象 (§15)。进一步，若設 $x\in\tilde{\varphi}_i(p)$，則应有 $x=\sum_{s=1}^{n+1}\lambda_s y^s$，$\lambda_s\geqq 0$，$1=\sum_{s=1}^{n+1}\lambda_s$，$y^s=\lim_{\nu\to\infty}y^{s\nu}$，$p=\lim_{\nu\to\infty}p^\nu$，$p^\nu\in S_n^i$，$y^{s\nu}\in\varphi_i(p^\nu)$。这些，是根据扩張 $\tilde{\varphi}_i$ 的定义容易理解的。其次，象以上所叙述过的，由于在 S_n^i 上 $p^\nu y^{s\nu}=p^\nu\zeta^i$ 成立，所以

$$px=\sum_{s=1}^{n+1}\lambda_s\lim_{\nu\to\infty}(p^\nu y^{s\nu})=\sum_{s=1}^{n+1}\lambda_s\lim_{\nu\to\infty}p^\nu\zeta^i=p\zeta^i,$$

因而，$\chi(p)$ 也满足狹义的 Walras 法則。

在这里，一适用 G-N 定理，則对于某个 $\hat{p}\in S_n$，$\chi(\hat{p})$ 必含有某个点 $\hat{x}\geqq 0$。将这个 $\hat{x}$ 分解为

$$\hat{x}=\zeta-\sum_{i=1}^{m}\hat{x}^i,\quad \hat{x}^i\in\tilde{\varphi}_i(\hat{p}),$$

現在来証明实际上 $\hat{p}>0$ 是成立的。假定，关于某种財貨設 $\hat{p}_j=0$，于是其他的某种財貨，譬如說，第 k 种財貨的价格为 $\hat{p}_k>0$。因为 $\zeta>0$，所以应当存在着第 k 种財貨的持有量为正的消費者。設他为 i，于是

$$I_i(\hat{p})>0.$$

因此，由于 $\hat{p}\in S_n^i$，故必須

$$\tilde{\varphi}_i(\hat{p})=\varphi_i(\hat{p}).$$

然而，因为 $\hat{p}_j=0$，所以由 u_i 的严格单調性可知，这位消費者 i 的第 j 种財貨的需要量必須是 a_j。就是說，关于这个 i，

$$\hat{x}_j^i=a_j.$$

但是，由于 $\hat{p}$ 是平衡价格，所以应当有

$$\hat{x}_j^i\leqq\sum_{i=1}^{m}\hat{x}_j^i\leqq\zeta_j<a_j.$$

由于产生了这种矛盾，所以关于一切的 j，有 $\hat{p}_j>0$。于是，因为 $\hat{p}\in S_n^0\subset S_n^i\,(i=1,2,\cdots,m)$，故关于一切消費者 i，有 $I_i(\hat{p})>0$，就是說，

$$\tilde{\varphi}_i(\hat{p})=\varphi_i(\hat{p}) \quad (i=1, 2, \cdots, m)$$

成立。实际上是証明了 $\hat{x}^i\in\varphi_i(\hat{p})$。这样做的时候，由 $\sum_{i=1}^{m}\hat{x}^i\leq\zeta$，狭义 Walras 法則与 $\hat{p}>0$，如从前节的注意1，2，3显然可知

$$\sum_{i=1}^{m}\hat{x}^i=\zeta$$

成立。証明完毕。

假定設持有量 $\zeta^i>0$ $(i=1, 2, \cdots, m)$，則由于 $S_n^i=S_n$，于是把映象加以扩張的一些步驟是不需要了。

§18 平衡解的存在(Arrow-Debreu 模型的情况)

第1定理的証明 这种情况与单純交換模型中各消費者的持有量为正的模型本质上是相同的。但是，如前所述，所謂"持有量 ζ^i 为正"的意义，是指一种較广泛的解釋，即在 X_i 中使 $\zeta^i>z^i$ 成立的 z^i 是存在的。

关于供求函数的性质，业已在§11中証明过，它具有紧的凸集为其象，并且滿足广义 Walras 法則。因此，它与超过供給函数具有同样的性质。所以，剩下来的只要証明它是閉映象就可以了。

关于生产单位 k 的供給函数(11.15)是在 S_n 上的閉映象的証明，是与在G-N定理中的价格操作函数是閉映象的証明完全相同的。

以下，将可看到，証明消費单位 i 的需要函数是在 S_n 上閉的，这与在单純交換模型中正持有量的情况大体上也相同。消費单位 i 的收入是

$$p\zeta^i+\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik}\pi_k(p),$$

为了利用上面的 z^i 方便起見，可設

$$I_i(p)=p(\zeta^i-z^i)+\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik}\pi_k(p) \quad (i=1, 2, \cdots, l), \quad (18.1)$$

由于 $p(\zeta^i - z^i) > 0$, $\pi_k(p) \geqq 0$, 所以恒有 $I_i(p) > 0$, 并且, 很明显地这是 p 的連續函数。因此,

$$\varphi_i(p) = \{x^i \mid x \in X_i \cap E, \text{ 在 } p(x - z^i) \leqq I_i(p) \text{ 之下 } \max u_i(x) = u_i(x^i)\} \tag{18.2}$$

成立。由于看到 $\varphi_i(p)$ 是閉映象, 若以前节(17.1)中的 λ_ν 代之(为了作出 $y^\nu = (1-\lambda_\nu)z^i + \lambda_\nu y$), 則除了

$$\lambda_\nu = \frac{I_i(p^\nu)}{\max(I_i(p^\nu), p^\nu(y - z^i))} \tag{18.3}$$

以外, 在单純交換情况下的一些討論在此仍能适用。因为前节最后一頁的注意也是适用的,所以映象的扩張是不需要了。因而,需要函数(11.17)也成为閉映象,如果参照 §15,則其結果,易于了解超过供給函数

$$\chi(p) = \zeta + \psi(p) - \varphi(p)$$

能满足 G-N 定理的一切假定。这里, 超立方体 Γ 可以取包含着集合

$$\zeta + \overbrace{E + \cdots + E}^{m} - (\overbrace{E + E + \cdots + E}^{l})$$

的任意的超立方体。因而, 在适当的 $\hat{p} \in S_n$ 中, $\chi(\hat{p})$ 含有非負的点,若将其分解,則可得

$$\sum_{i=1}^{l} \hat{x}^i \leqq \sum_{k=1}^{m} \hat{y}^k + \zeta.$$

由此以下的討論已經在 §12 中叙述过了。

第 2 定理的証明 关于供給函数的事情与第 1 定理是完全同样的。討論的要点是需要函数的連續性問題。

由假設,虽然各消费单位 i 的持有量 ζ^i 是非正的,但是存在着使 $\zeta^i \geqq z^i$ 成立的 $z^i \in X_i$, 因此关于至少一个种类的"生产的"財貨 $j \in P$,成立着 $\zeta^i_j > z^i_j$,与第 1 定理的情况完全同样,可以定义 $I_i(p)$

(18.1),遵循前节的討論,使 $I_i(p)>0$ 成立的 p 的全体設为 S_n^i, 則

$$S_n^0\subset S_n^i\subset S_n,$$

并且 $\varphi_i(p)$ (18.2) 是在 S_n^i 上的閉映象,且象 $\varphi_i(p)$ 是凸集。故而,若把这个 $\varphi_i(p)$ 扩張为在 S_n 全体上的閉映象 $\tilde{\varphi}_i(p)$,便可以作出是凸集的象 $\tilde{\varphi}_i(p)\neq\phi$. 利用了这样的 $\tilde{\varphi}_i(p)$ 与 $\psi_k(p)$,作出超过供給函数 $\chi(p)$,那末为了証明它能滿足 G-N 定理的一切条件,只要重复一下与前节本质上同样的討論就行了。故而,对于 $\chi(p)$,平衡解存在。最后要証明的是,对于平衡价格 $\hat{p}\in S_n$, 必有 $\hat{p}\in S_n^i$ 成立。因此,关于各个 i,

$$\tilde{\varphi}_i(\hat{p})=\varphi_i(\hat{p}).$$

为此,置于平衡下的"生产的"財貨的价格,只要証明一切都是正的就行了。以下,我們将証明这一点,然而,由于討論稍长,所以分成几个阶段来叙述。

第1段　設将 $\hat{p}$ 作为 $\chi(p)$ 的平衡价格,把

$$\hat{x}^i\in\tilde{\varphi}_i(\hat{p}),\quad \hat{y}^k\in\psi_k(\hat{p}),\quad \zeta+\sum_{k=1}^{m}\hat{y}^k\geq\sum_{i=1}^{l}\hat{x}^i$$

作平衡的供求量的分解。由于 $\hat{y}^k\in\psi_k(\hat{p})$,并且 $\hat{y}^k\in\tilde{Y}_k$, 所以 §12 (i) 的討論对它还是适用的,故

$$\hat{y}=\sum_{k=1}^{m}\hat{y}^k$$

是在 $Y=\sum_{k=1}^{m}Y_k$ 全域上的 $\hat{p}y$ 的最大点。其次,在这里,对于平衡价格 $\hat{p}$, 假定某种"生产的"財貨 $h\in P$ 的价格是 $\hat{p}_h=0$. 可以証明这个假定在証明的最后阶段是会产生矛盾的。首先,为了叙述的方便,設 $h=1$. 这样,由"生产的"財貨的定义,对于 $\hat{y}$,存在着 $y\in Y$, 使 $y_j\geq\hat{y}_j\,(j\neq1)$,并且 $y_d>\hat{y}_d$ (对于至少一个 $d\in D$ 来說)。这里 D 是一切消费单位的需求財貨的号碼的集合。这样,由于 $\hat{y}$ 是在 Y 上 $\hat{p}y$ 的最大点,故对于上面所記的 y, 有

$$0 \geqq \hat{p}\cdot y-\hat{y}) = \sum_{j=1}^{n}\hat{p}_j(y_j-\hat{y}_j) = \sum_{j=2}^{n}\hat{p}_j(y_j-\hat{y}_j) \geqq \hat{p}_d(y_d-\hat{y}_d).$$

但是，由于 $y_d > \hat{y}_d$，因此必須 $\hat{p}_d=0$. 因此，如果在"生产的"財貨中有价格为 0 的东西，那末至少有一个需求財貨的价格是 0.

第 2 段 由于 $\hat{x}^i \in \tilde{\varphi}_i(\hat{p})$，故按定义应有

$$\hat{x}^i = \sum_{s=1}^{n+1} \lambda_s^i x^{si}, \quad \lambda_s^i \geqq 0, \quad \sum_{s=1}^{n+1} \lambda_s^i = 1, \tag{18.4}$$

$$\lim_{\nu\to\infty} x^{si\nu} = x^{si}, \ x^{si\nu} \in \varphi_i(p^\nu) \quad (s=1, 2, \cdots, n+1), \tag{18.5}$$

$$\lim_{\nu\to\infty} p^\nu = \hat{p}, \quad p^\nu \in S_n^i. \tag{18.6}$$

首先，从(18.5)的右面一式，关于每一組各个 ν，$(n+1)$ 个 $u_i(x^{si\nu})$ $(s=1, 2, \cdots, n+1)$ 的一切值相等，同时，根据 u_i 的連續性，$n+1$ 个极限值

$$\lim_{\nu\to\infty} u_i(x^{si\nu}) = u_i(x^{si}) \quad (s=1, 2, \cdots, n+1) \tag{18.7}$$

也相等，然而，因为它的連續性与条件 III. c，故 u_i 是拟凹函数(参照 §8)。由于 $n+1$ 个 $u_i(x^{si})$ $(s=1, 2, \cdots, n+1)$ 都相等以及(18.4)，故由拟凹性得

$$u_i(\hat{x}^i) \geqq u_i(x^{si}) \quad (s=1, 2, \cdots, n+1). \tag{18.8}$$

现在，对某个 $x^i \in E \cap X_i$，設 $u_i(x^i) > u_i(\hat{x}^i)$，则由(18.8)，有

$$u_i(x^i) > u_i(x^{si}).$$

因此，关于充分大的 ν，由于从(18.7)得 $u_i(x^i) > u_i(x^{si\nu})$，所以

$$p^\nu(x^i - z^i) > I_i(p^\nu),$$

就是說，$p^\nu x^i > p^\nu x^{si\nu}$ 成立。这里，如使 $\nu\to\infty$，则 $\hat{p}x^i \geqq \hat{p}x^{si}$. 因而，对于作为 x^{si} 的凸組合的 $\hat{x}^i$ 来說，$\hat{p}x^i \geqq \hat{p}\hat{x}^i$ 成立。集中归納这些結果，若設 $x^i \in E \cap X_i$，$u_i(x^i) > u_i(\hat{x}^i)$，则得到証明

$$\hat{p}x^i \geqq \hat{p}\hat{x}^i.$$

第 3 段 象在第 1 段中証明的那样，关于某个需求財貨 $d \in D$，有 $\hat{p}_d = 0$. 由需求財貨的定义，可以适当地选取 $\lambda > 0$，并假設

$\hat{x}^i+\lambda e^d\in X_i$，以及

$$u_i(\hat{x}^i+\lambda e^d)>u_i(\hat{x}^i),\tag{18.9}$$

这里，$e^d=(\overbrace{0,\cdots,0,1}^{d},0,\cdots,0)$，設(18.9)成立，則再按 u_i 的条件 III. c 可知对于綫段$(\hat{x}^i,\hat{x}^i+\lambda e^d]$上的点 w，有

$$u_i(w)>u_i(\hat{x}^i).$$

其次，因为 $\zeta+\sum_{k=1}^{m}\hat{y}^k\geqq\sum_{i=1}^{l}\hat{x}^i$，所以 $\hat{x}^i\in\widetilde{X}_i$。因而，$\hat{x}^i$ 是 E 的内点。如果在上述的綫段上把 w 取得与 $\hat{x}^i$ 充分地靠近，則 w 也是 E 的内点。这里，若考虑到 $w=\hat{x}^i+\mu e^d$，$0<\mu\leqq\lambda$，則結果在 $E\cap X_i$ 内有着其形状为 $\hat{x}^i+\mu e^d$ 的点，易知它成为 E 的内点。

其次，取完全任意的 $x^i\in X_i$，作 $\hat{x}^i$ 与 x^i 的凸組合

$$x^i(t)=(1-t)\hat{x}^i+tx^i\quad(0<t<1),\tag{18.10}$$

若把 t 設为充分地小，則可以証明

$$x^i(t)+\mu e^d\in E\cap X_i,$$

并且

$$u_i(x^i(t)+\mu e^d)>u_i(\hat{x}^i).\tag{18.11}$$

因为，在上述的 $w=\hat{x}^i+\mu e^d$ 之中，有一些适当的点成为 E 的内点，同时，u_i 是連續的，并且，$u_i(w)>u_i(\hat{x}^i)$ 成立，所以，把 t 取得充分小时，$x^i(t)+\mu e^d$ 就可与 w 很接近，于是就能获得所需要的結果[1]。

因而，利用第2段的結果，对于适当的 $t>0$，有

$$\hat{p}(x^i(t)+\mu e^d)\geqq\hat{p}\hat{x}^i.\tag{18.12}$$

在这里，若考虑到 $\hat{p}_d=0$，由于 $\mu\hat{p}e^d=0$，所以(18.12)就是 $\hat{p}x^i(t)\geqq\hat{p}\hat{x}^i$，即

$$(1-t)\hat{p}\hat{x}^i+t\hat{p}x^i\geqq\hat{p}\hat{x}^i.$$

---

[1] 要将 μ 进一步地取得使 $\hat{x}^i+\mu e^d\in X_i$ 得以成立的那种充分小。因此，注意

$$x^i(t)+\mu e^d=(1-t)(\hat{x}^i+\mu e^d)+t(x^i+\mu e^d)\in X_i$$

成立。

整理此式,并用 $t>0$ 去除,就有

$$\hat{p}x^i \geqq \hat{p}\hat{x}^i. \tag{18.13}$$

由以上所述,可知 $\hat{x}^i$ 是对于一切 $x^i \in X_i$ 而言的 $\hat{p}x^i$ 的最小点。同时,可知这个結論是关于一切消費单位 i 成立的。所以,$\hat{x}=\sum_{i=1}^{l}\hat{x}^i$ 是在 $X=\sum_{i=1}^{l}X_i$ 上的 $\hat{p}x$ 的最小点。

第4段 关于各个 i,在預算制約式成立时,有

$$\hat{p}\hat{x}^i=\hat{p}\zeta^i+\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik}\pi_k(\hat{p}) \tag{18.14}$$

成立。我們用反証法来証。假設关于某个 i,(18.14)不成立,而成立着严格不等号,则由于 $\hat{p}(\hat{x}^i-z^i)<I_i(\hat{p})$,对于第3段中所說的 $w=\hat{x}^i+\mu e^i$,若把 $\mu>0$ 取得充分地小,同时,又把 ν 取得充分地大,则由連續性,可以使

$$p^\nu(w-z^i)<I_i(p^\nu) \text{ 与 } u_i(w)>u_i(x^{\nu i\nu})$$

同时成立。但由于 $w\in E\cap X_i$,这引起了矛盾。故而,关于一切 i,(18.14)成立,若取其总和,则易知 $\hat{x}$, $\hat{y}$, ζ 之間,狭义 Walras 法則成立。

第5段 由第2定理的假定,存在着使 $x^0<y^0+\zeta$ 成立的 $x^0\in X$ 与 $y^0\in Y$。取这些 x^0, y^0,如果作 $\hat{p}$ 与它們的内积,则虽然

$$\hat{p}x^0<\hat{p}y^0+\hat{p}\zeta$$

成立,但象上面(第1段)那样,因为 $\hat{y}$ 是在 Y 中 $\hat{p}y$ 上的最大点,所以

$$\hat{p}y^0\leqq\hat{p}\hat{y}.$$

同时,由第3段的結果,因为 $\hat{x}$ 是在 X 中 $\hat{p}x$ 的最小点,所以

$$\hat{p}\hat{x}\leqq\hat{p}x^0.$$

把这些不等式結合起来考虑,则有

$$\hat{p}\hat{x}<\hat{p}\hat{y}+\hat{p}\zeta. \tag{18.15}$$

这与第4段中已証明了的狭义 Walras 法则矛盾。

証明最后阶段所产生的矛盾，其根源是在第1段中我們假定了某种“生产的”財貨的价格是0的緣故。因而，关于一切 $h\in P$，必有 $\hat{p}_h>0$. 于是，

$$I_i(\hat{p})>0 \quad (i=1, 2, \cdots, l),$$

就是說，$\hat{p}\in S_h^i$ $(i=1, 2, \cdots, l)$ 成立，关于一切的消費单位 i，有

$$\tilde{\varphi}_i(\hat{p})=\varphi_i(\hat{p}).$$

以上，第2定理完全証明了。

后　　記

本书实在沒有做到周到的叙述，但也觉得在以上篇幅中明确了所謂集合論方法的性质与特征，并且介紹了若干应用这种方法所取得的最近成果。我們的意图是以凸集理論为中心而給出統一的解释，由于篇幅的限制，其他一些重要成果，譬如說，K. J. Arrow 的社会福利函数等饒有兴趣的研究是沒有余裕去談到了。关于这些当留待他日有机会时再說。

目前，在数理經济学的問題中有效地应用集合論方法，主要限于靜态的一方面。对于动态問題的闡明，近代数学方法能够作出何种程度的貢献，还有待于今后的研究。

記 号 表

ϕ	空集
$X, Y, \cdots$ (大写拉丁字母)	集合
$x, y, \cdots$ (小写拉丁字母)	点(主要是 Euclid 空間的点)
x^i (上标)	区别不同点的标記
x_j (下标)	Euclid 空間中点 x 的第 j 个分量
xy	Euclid 空間的內积
$\|x\| = \sqrt{xx}$	Euclid 空間中点 x 的模
$\rho(x, y) = \|x-y\|$	两个点 x, y 之間的距离
$\{x \mid \cdots\cdots\}$	由属性……来定义的集合
$X \subset Y$	X 是 Y 的部分集合(子集)
$x \in X$	x 是集合 X 的元素
$X \cup Y$	X 与 Y 的和集
$X \cap Y$	X 与 Y 的公共部分(交集)
$X \times Y$	X 与 Y 的直积集合
$\overline{X}$	X 的閉包
X^0	X 的开核
$X+Y$	X 与 Y 的矢量和
$X-Y$	X 与 Y 的矢量差
$f: X \to Y$	从 X 到 Y 的映象,或:使得 X 的点对应于 Y 的子集的点对集合映象

注意 Euclid 空間的点 x 全部用横写的矢量形式 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 来表示。

参考文献

在执笔时直接参考的:

[1] P. Alexandroff & H. Hopf: Topologie I (Springer, 1935).

[2] K. J. Arrow & G. Debreu: Existence of an equilibrium for a competitive economy, Econometrica **22**, No. 3 (1954).

[3] N. Bourbaki: Espaces vectoriels topologiques (Hermann, 1953).

[4] D. Gale: The law of supply and demand, Math. Scand. **3** (1955).

[5] S. Kakutani: A generalization of Brouwer's fixed point theorem, Duke Math. Journal **8**, No. 3 (1941).

[6] T. C. Koopmans, ed: Activity analysis of production and allocation, Cowles Commission Monograph No. 13 (Wiley, New York, 1951).

[7] H. W. Kuhn: On a theorem of Wald, Annals of Math. Studies No. 38 (1956).

[8] L. McKenzie: On equilibrium in Graham's model of world trade and other competitive systems, Econometrica **22**, No. 2 (1954).

[9] J. von Neumann: Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, Math. Ann. Bd. 100 (1928).

[10] J. von Neumann: Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes, Ergebnisse eines Math. Kolloq. Heft 8 (1935~1936).

[11] J. von Neumann & O. Morgenstern: Theory of games and economic behavior, 3rd edition (Princeton Univ. Press, 1953).

[12] H. Nikaidô: Berichtigung und Zusatz für meine Mitteilung "Zum Beweis der Verallgemeinerung des Fixpunktsatzes", Kōdai Math. Sem. Reports **6**, No. 1 (1954).

[13] H. Nikaidô: Note on the general economic equilibrium for nonlinear production functions, Econometrica **22**, No. 1 (1954).

[14] H. Nikaidô: New aspects of von Neumann's model with special regard to computational problems, Ann. Ins. Stat. Math. **VI**, No. 3 (1955).

[15] H. Nikaidô: On the classical multilateral exchange problem, Metroeconomica **VIII**, Fasc. 2 (1956).

[16] H. Nikaidô: A supplementary note to [15], Metroeconomica **IX**, Fasc. 3 (1957).

[17] 二階堂副包：計量經済学における最近の話題について，数学第8卷第1号(岩波，1956).
[18] A. Wald: Über die eindeutige positive Lösbarkeit der neuen Produktionsgleichungen, Ergebnisse eines Math. Kollóq. Heft 6 (1933～1934).
[19] A. Wald: Über die Produktionsgleichungen der ökonomischen Wertlehre, Ergebnisse eines Math. Kolloq. Heft 7 (1934～1935).
[20] M. E. L. Walras: Éléments d'économie politique pure ou théorie de la richesse sociale (Paris et Lausanne, 1874).
[21] G. T. Whyburn: Analytic topology, Amer. Math. Soc. Colloq. Publications (1942).

本书中随处引用的一些拓扑与代数的基础知識，只要有关这方面的入門书籍，在开头二、三章中就必然有介紹的。这里有着外文的与我国的(指日本——譯者注)各种优秀的参考书，不可能一一列举，在本书中关于数学知識的要点主要是参考以下的书籍：

[22] 河田敬義：集合·位相·測度(本讲座)(印本丛书有英华譯：集合·拓扑·测度)。
[23] 入江昭二：位相解析入門(岩波，1957).
[24] 高木貞治：解析概論，增訂版(岩波，1943).

[23]叙述得特別亲切詳細，它对于初学者是很合适的一本好书。

此外，对理工科系統的讀者，作为学习数理經济学的入門，并且收集着各种問題的概要的书籍有：

[25] R. G. D. Allen: Mathematical economics (Macmillan, 1956).
[26] R. Dorfman, P. A. Samuelson & R. M. Solow: Linear programming and economic analysis (McGraw-Hill, 1957).